华中师范大学

博士学位论文

动态黑洞的霍金辐射与标量场方程的精确解

姓名：吴双清

申请学位级别：博士

专业：理论物理

指导教师：蔡勖

2002.5.1

摘　　要

自从Hawking在1974年发现黑洞并不是完全黑的而是可以从视界发射热辐射以来, 在过去的四分之一多个世纪里, 人们已经用许多不同的方法对各种黑洞的量子热性质进行了大量的研究. 但是多数研究主要集中在对稳(静)态黑洞热效应的考察之上. 由于天体物理学上的一个黑洞实际上会向外发射辐射或吸积其周围的物质, 因而它是动态的、随时间而演化的. 因此研究动态黑洞的热性质就比稳态情形更加富有意义. 但是研究动态黑洞Hawking蒸发的工具非常有限, 传统的计算重整化能动张量的方法只适用于球对称情形, 而且只能作近似处理, 因而用途非常局限, 难以用于其它更一般的情况.

而赵峥教授建议的广义乌龟坐标变换法(GTCT)则与之不同, 它可以用于对各种黑洞时空热性质的研究上, 并且获得了很大的成功. 但是就我们所知, 在我们的工作出来以前, 这个方法在研究动态Kerr(-Newman)黑洞和作加速运动的Kinnersley黑洞这两类时空中Dirac旋量粒子的Hawking辐射问题上尚有一定的困难. 本文旨在解决这一困难, 并进一步发展GTCT法, 使其成为一个比较完整的理论体系, 可以用于对一般黑洞时空中任意自旋粒子热效应的研究上.

本文主要探讨各种特定的黑洞时空中量子场的行为, 其内容可以划分为两个部分: 一是寻找已知的黑洞几何背景上各种量子场(例如Klein-Gordon标量场)方程的精确解. 二是研究各种黑洞中量子场的热性质, 主要是集中在对动态黑洞中Dirac粒子的Hawking 辐射的研究上. 需要说明的是本文只关心四维黑洞情形, 不考虑其它维数的黑洞情形. 全文共分九章.

第一章简要介绍与本文有关的黑洞基本理论, 包括黑洞物理学发展的简要历史, 四维黑洞解的的分类, 黑洞视界附近的经典过程和量子效应, 以及黑洞热力学定律.

在第二章中我们研究了稳态轴对称黑洞背景几何中Klein-Gordon场方程分离变量部分的精确解, 表明了Kerr-Newman黑洞及Kerr-Sen黑洞中有质量复标量场方程的径向部分和角向部分均满足广义椭球波方程, 而后者实际上就是合流的Heun方程. 基于Laplace变换, 给出了联系不同参数的两个解的一套积分方程. 类似地, 一般可以证明Plebanski-Demianski 度规(Petrov D-型时空)微扰的无质量的任意自旋场方程满足广义Teukolsky方程, 其分离变量部分可以变换为Heun方程的形式.

第三章首先回顾了Hawking效应发现的历史背景, 解释了黑洞辐射发生的物理机制, 然后介绍推导Hawking辐射的各种方法, 以及与这个理论有关的最新研究和可能的实验检验方案.

在这四章中, 重点介绍了Damour-Ruffini-Sannan(DRS)方案, 用这个方法研究了Schwarzschild 静态黑洞中标量粒子和旋量粒子的Hawking蒸发. 接着用它考察了Kerr-Newman黑洞外(内)视界上Klein-Gordon标量场和Dirac旋量场的Hawking辐射("吸收"), 并指出内视界可以看成一个反常的负温系统. 利用第二章中导出的精确解, 我们用指标法对标量场的Hawking蒸发重新作了研究, 将Bardeen-Carter-Hawking建立的Kerr-Newman黑洞外视界上的热力学四定律推广到Cauchy内视界上, 并且讨论了转动带电的黑洞平衡辐射过程的四个量子守恒定律, 引入了标量粒子的量子熵和约化视界面积的这两个新概念. 最后用指标法研究了Kerr-Sen黑洞背景上标量粒子的Hawking效应, 指出Kerr-Sen黑洞与Kerr-Newman黑洞虽然几何性质不同, 但它们的热力学性质和量子热效应却极其相似.

余下的几章是这本论文的核心主体部分, 用广义乌龟坐标变换法研究了动态黑洞中高自旋粒子(Dirac粒子和光子)的Hawking辐射, 发现动态Kerr(-Newman)黑洞存在自旋-转动耦合效应, 作任意加速运动的Kinnersley黑洞有自旋-加速耦合效应出现. 对于Vaidya-型球对称时空, 我们发现在Eddington-Finkelstein(EF)坐标系中Dirac粒子和光子的Hawking辐射是不对称的. 对于这类非静态的球对称黑洞, 没有看到与自旋相关的量子热效应出现.

与稳态黑洞情形相比, 考察动态黑洞的Hawking蒸发更加困难. 在利用GTCT法研究一般黑洞时空的量子热效应时, 需要同时考虑对一阶方程和二阶方程作广义乌龟坐标变换处理, 然后利用一阶方程提供的一阶导数之间的关系式去换掉二阶方程中的一阶导数交叉项, 这样才能将每个分量满足的二阶方程在视界附近化为单一分量的标准波方程. 这个步骤是讨论高自旋粒子的Hawking蒸发问题能够成功的关键之处, 因为余下的工作完全可以按照DRS建议的方案去进行处理. 第五章首先介绍赵峥等人在研究动态黑洞的Hawking辐射中对DRS方法的推广, 然后阐明我们对这个方法继续发展的思想, 并简介在这方面所做的工作以及得到的一些主要结果.

用这个发展了的DRS-Zhao-Wu-Cai(DRS-ZWC)方法, 在第六章中重新研究了Vaidya-型球对称黑洞中Dirac粒子和光子的量子热效应, 表明在EF坐标系中Hawking辐射对它们的不同分量是不对称的. 另外, 我们采用了不同的方法严格

证明任何动态球对称黑洞不可能有新的量子(能层)热效应.

第七章用DRS-ZWC方法讨论了动态Kerr黑洞中Dirac粒子和光子的Hawking蒸发. 在自旋为1/2 和1粒子的热辐射谱中首次看到了一项新的相互作用效应, 这个新的效应来自蒸发黑洞的转动与粒子的自旋之间的相互耦合. 我们进一步证明了自旋-转动耦合效应是辐射的Kerr(-Newman) 黑洞中高自旋粒子($s = 1/2, 1$)的黑体辐射谱所具有的普适特征. 当时空退化为Vaidya-型黑洞时这个效应就消失了.

第八章将这个推广了的GTCT法应用到Kinnersley黑洞的量子热效应的研究上, 发现作任意加速运动的Kinnersley黑洞中旋量粒子的Hawking热辐射谱中有自旋-加速耦合效应出现.

在第七章和第八章中, 我们还分别选用了不同的零标架对这类问题再次作了研究, 表明物理结果独立于坐标系的选取. 另外, 研究还表明了用广义乌龟变换法讨论黑洞的Hawking辐射时不需要对场方程事先作退耦处理, 只需根据时空的对称性作一次分离变量即可. 最后, 我们预言作转动和加速运动的Kinnersley-Kerr黑洞会有自旋-转动-加速耦合(混合)效应出现.

第九章是对本文在动态黑洞的Hawking辐射方面的研究工作的一个总结和展望, 提出了今后相关工作的设想. 在附录A中, 用代数方法推导了黑洞热力学第一定律的的表达式. 附录B给出了GTCT的一般形式以及导数之间的变换关系式. 附录C则列举了场方程的Newman-Penrose 表述, 旋系数和旋量在零标架的Lorentz转动下的变换性质.

关键词: 广义乌龟坐标变换, Hawking辐射与“吸收”, 动态黑洞, 事件视界, Hawking温度, 热辐射谱, Dirac粒子, 自旋-转动(加速)耦合效应, 自旋权重的广义椭球波函数, 合流Heun方程, 推广的黑洞热力学四定律

ABSTRACT

Ever since Hawking discovered in 1974 that a black hole is not completely black but can emit radiation from its event horizon, considerable efforts had been made to reveal the quantum thermal properties of various kinds of black holes by many different methods in the past quarter century. However, most of these researches were concentrated on studying the thermal effect of static or stationary black holes. Because a realistic black hole in astrophysics can radiate or absorb matter surrounding it, it is non-stationary and evolves in the time. Thus the studies of the thermal properties of non-stationary black holes are more meaningful than that of stationary ones. But there are very limited tools to deal with the Hawking evaporation of non-stationary black holes. The traditionary method by calculating the renormalized energy momentum tensor can be used only in the spherical symmetric case, and it deals with the problem in an approximate manner. Thus this method is of limited use and meets great difficulties in other most general cases.

The method of generalized tortoise coordinate transformation (GTCT) suggested by Prof. Zhao Zheng is, however, very different from that one. It has been used successfully to investigate the thermal properties of all kinds of black hole space-times. Prior to our work, as to the best of our knowledge, this method still has some difficulties in dealing with the Hawking evaporation of Dirac particles in the non-stationary Kerr(-Newman) black holes and in the accelerating Kinnersley space-times. The aim of this thesis is to settle down this problem, to develop the GTCT method further, and to make it become a fairly integrated system so that it can be used to tackle with the thermal effect of particles with arbitrary spins in the most general space-times.

The main topic of this thesis is to investigate the behaviors of quantum fields in all specific black hole space-times. It can be divided into two parts: one is to find exact solutions to miscellaneous wave equations of quantum fields such as

Klein-Gordon scalar field on some known black hole background geometries. The other is to discuss the thermal effect of quantum fields in various kinds of black hole space-times, focusing on the Hawking radiation of Dirac particles in the non-stationary black holes. It should be noted that here we only concern about the four dimensional case, neglecting other dimensional black holes. This dissertation has nine chapters.

Chapter 1 introduces concisely some essential black hole theories with relation to this dissertation, including a brief history of the developments of black hole physics, classification of four dimensional black hole space-times, classical processes and quantum effects near black hole event horizon and four laws of black hole thermodynamics.

In Chapter 2, we study exact solutions of the separated parts of Klein-Gordon field equation on some stationary and axisymmetry black hole backgrounds. We demonstrate that the radial and angular parts of a massive scalar field equation in the Kerr-Newman and Kerr-Sen black hole space-times satisfies the generalized spheroidal wave equation which is, in fact, a confluent Heun equation. On the base of the Laplace transformation, we present a new set of integral equations that relate two solutions with different parameters. Analogically, it can be generally shown that perturbations of massless fields with arbitrary spins in the Plebanski-Demianski metric (space-time of Petrov D-type) satisfy the generalized Teukolsky equation and their separated parts can be transformed into the form of Heun equation.

In the third chapter, we first review the history backgrounds about the discovery of Hawking effect, and explain the physical mechanism that leads to black hole radiation. Then we introduce various methods that can deduce Hawking radiation, some recent researches on this theory and possible experimental ansatz that may test Hawking radiation.

Chapter 4 emphasizes the Damour-Ruffini-Sannan (DRS) method and apply it to discuss the Hawking evaporation of scalar and spinorial particles in the static

Schwarzschild black hole. Using this approach, we then investigate the Hawking radiation (absorption) of Klein-Gordon and Dirac fields from the outer (inner) event horizon of the Kerr-Newman black hole and point out that the inner horizon can be viewed as an abnormal negative temperature system. By means of the exact solutions derived in the second chapter, the Hawking evaporation of scalar fields is reexamined by the indices method, and then we extend the four laws of Kerr-Newman black hole thermodynamics established by Bardeen-Carter-Hawking on the outer event horizon to the same form on the Cauchy inner horizon. We have also discussed four quantum conservation laws on equilibrium radiation processes of a charged Kerr black hole, proposed a new concept of quantum entropy for scalar particles and introduced a notation of the reduced event horizon area. With the indices method, we finally investigate the Hawking effect of scalar particles on the Kerr-Sen black hole background, and point out that the thermodynamic properties and quantum thermal effects of Kerr-Sen black hole resemble fairly that of Kerr-Newman black hole though they have different geometries.

The remaining chapters are the kernel of this dissertation. We use the method of generalized tortoise coordinate transformation to study the Hawking radiation of higher spin particles (Dirac particles and photons) in some non-stationary black holes. We reveal that a non-stationary Kerr(-Newman) black hole has spin-rotation coupling effect and an arbitrarily accelerating Kinnersley black hole posses spin-acceleration coupling effect. In the spherically symmetry case of Vaidya-type space-times, we find that the Hawking radiation of Dirac particles and photons is asymmetric with respect to their different components in the advanced Eddington-Finkelstein (EF) coordinate system. In these kinds of non-static spherically symmetric black holes, one hasn't found any new quantum thermal effect dependent upon the spins of particles.

Compared with the stationary cases, it is much more difficult to deal with the Hawking evaporation of non-stationary black holes. When we adopt the GTCT method to deal with the quantum thermal effect of a general space-time, we must consider simultaneously the asymptotic behaviors of the first-order and second-

order equations near the event horizon. Only making use of the relations between the first-order derivatives provided by the first-order equation can we eliminate the crossing-terms of the first-order derivatives in the second-order equations and recast each equation to a standard wave equation near the event horizon. This procedure is the key step that leads to success in discussing the Hawking evaporation of particles with higher spins, because the remained is just as those proposed by DRS. In Chapter 5, the generalization of DRS method to the case of non-stationary black holes is introduced by Zhao Zheng *at al.* when dealing with the Hawking radiation. Then we explain the idea that can further extend this method and briefly present our work done on these subjects and some main results we have obtained.

By making use of this developed DRS-Zhao-Wu-Cai (DRS-ZWC) method, we re-investigate in Chapter 6 the quantum thermal effect of Dirac particles and photons in some spherically symmetric black holes of Vaidya-type, and demonstrate that the Hawking radiation is asymmetric with respect to their different components in the advanced EF coordinate system. In addition, different methods have been used to prove rigorously that there does not exist any new quantum thermal (ergosphere) effect of any nonstatic and spherically symmetry black hole.

In Chapter 7, the DRS-ZWC method is adopted to deal with the Hawking evaporation of Dirac particles and photons in a non-stationary Kerr black hole. A new effect due to the interaction between the spin of particles and the rotation of an evaporating Kerr black hole has been observed in the thermal radiation spectra of spin-$1/2, 1$ particles. This spin-rotation coupling effect is further shown to be a universal feature of the blackbody radiation spectra of particles with higher spins ($s = 1/2, 1$) in a radiative Kerr(-Newman) space-time. This effect vanishes when the space-time degenerates to a Vaidya-type black hole.

Chapter 8 is devoted to applying this extended GTCT method to manipulate the quantum thermal effect of Kinnersley black holes. We find that there appears a spin-acceleration coupling effect in the Hawking thermal spectrum of spinorial particles in an arbitrarily accelerating Kinnersley black hole.

Besides, we have chosen different null-tetrad systems to reexamine the same questions in Chapter 7 and Chapter 8, and shown that the physical results are independent of the choice of coordinate system. Our researches have also demonstrated that one needn't decouple the field equations in advance when the GTCT method is applied to black hole radiation, but only need once separation of variables according to the symmetry of space-times. Finally we conjecture that the Kinnersley-Kerr black hole with rotation and acceleration might have a kind of spin-rotation-acceleration (mixed) effect.

In Chapter 9, we summarize our work on the Hawking evaporation of non-stationary black holes and outlook the related proposals in the future. In Appendix A, we derive algebraically the expression of first laws of black hole thermodynamics. Appendix B presents the general GTCT form and relations among the derivatives. Appendix C lists the Newman-Penrose formalism of field equations, transformation properties of spin coefficients and spinors under three kinds of Lorentz rotations of null-tetrads.

Key Words: *generalized tortoise coordinate transformation, Hawking radiation ("absorption"), non-stationary black holes, event horizon, Hawking temperature, thermal radiation spectrum, Dirac particles, spin-rotation(acceleration) coupling effect, spin-weighted generalized spheroidal wave function, confluent Heun equation, generalized four laws of black hole thermodynamics*

序　　言

Hawking的考察将黑洞的量子效应阐释为由事件视界发射热辐射谱粒子在黑洞物理学上立下了一个划时代的里程碑. 这一效应的发现不仅解决了黑洞热力学中当时存在的矛盾, 而且深入地揭示了量子力学、热力学与引力之间的内在联系. 考察各种类型黑洞的热性质成为黑洞物理学中的一个重要课题, 研究黑洞蒸发的三个基本要素是确定黑洞的局部事件视界面方程、计算黑洞的表面引力(温度)和导出热辐射谱. 由于存在着蒸发和吸积等天体物理过程, 宇宙中实际存在的黑洞是随时间变化的, 因此深入地研究蒸发黑洞的Hawking效应对于认识黑洞这种暗天体有着重要意义. 近几年来, 动态黑洞的Hawking辐射引起了人们极大的兴趣, 但大多数研究都集中在探讨标量场的量子热效应上面. 对于动态黑洞中Fermi子的Hawking辐射的考察则仅限于球对称黑洞情形.

在研究动态黑洞Hawking辐射的各种方法中, 乌龟坐标变换法是使用较广并且行之有效的一种局部分析方法. 该方法最初由Damour-Ruffini提出来并用于处理静态黑洞和稳态黑洞中标量场的量子热效应. 后来Sannan进一步发展了这一方法, 使之不仅能适用于标量场情形, 而且可以处理Fermi子的热辐射. 赵峥教授等人则将静态和稳态情形下的乌龟坐标变换推广到非静态和非稳态情形, 对各种类型黑洞中的标量场和非静态的球对称黑洞中Dirac粒子的量子热效应作了大量的探讨. 但这一方法用于处理动态轴对称黑洞或非静态非球对称黑洞等一般时空中Dirac粒子的Hawking辐射时, 则遇到了较大的困难, 原因在于对于一般时空中的Dirac方程不能直接完全分离变量.

试图解决动态Kerr(-Newman)黑洞和作加速运动的Kinnersley时空中Dirac粒子的Hawking效应的想法刺激了作者在动态黑洞的Hawking辐射方面的研究工作和这本论文的写作. 这本论文的主要目的是进一步发展广义乌龟坐标变换法, 使之成为一个完整的理论体系, 用以解决上述两个问题.

需要说明的是, 本文的作者在动态黑洞的量子热效应方面上所做的研究主要是建立在赵峥教授等人的工作的基础上的. 采用赵峥提出的广义乌龟坐标变换, 作者首先成功地处理了动态Kerr黑洞中Dirac粒子的Hawking辐射, 以后又把这一

工作推广并应用到了动态球对称黑洞和Kinnersley黑洞情形, 另外还用这一方法考察了动态黑洞中光子的Hawking蒸发. 研究表明, 考察动态黑洞中Dirac粒子等高自旋粒子的Hawking辐射, 需要对一阶方程和二阶方程同时作处理, 然后利用一阶导数之间的关系式去换掉二阶方程中的交叉项, 使得作了乌龟坐标变换后的每一个分量满足的二阶方程在视界附近都是一个可分离变量的单一分量的标准波动方程, 因而能够克服上述困难. 用这一方法导出的局部视界面方程和Hawking温度与已有的结果完全一致.

本文在黑洞量子热效应方面上[第六、七、八章]的主要结论有如下几点:

1. 进一步发展了广义乌龟坐标变换法, 使之成为一个完整的理论体系;

2. 广义乌龟坐标变换法能够用以研究任意黑洞时空中任意自旋粒子的Hawking效应, 它不需要对场方程事先进行分离变量处理, 但需要同时考虑对一阶的和二阶的场方程作乌龟坐标变换处理;

3. Vaidya-型动态球对称黑洞中高自旋粒子的Hawking辐射是不对称的, 这可能与该类时空在Eddington-Finkelstein坐标系中的过去-未来不对称性有关;

4. 任何动态球对称黑洞不可能有与粒子质量有关的量子能层效应;

5. 动态轴对称黑洞有自旋-转动耦合效应;

6. 作任意加速运动的Kinnersley黑洞有自旋-加速耦合效应;

7. 自旋-转动(-加速)耦合效应的特征是它明显与粒子处于不同的自旋手征态有关, 这种效应不存在于标量粒子Hawking辐射的Bose分布谱中. 对于Kinnersley-Kerr黑洞, 我们预言会有自旋-转动-加速耦合(混合)效应出现;

8. 选取具体不同的零标架不影响最后的物理结果.

本文的工作表明广义乌龟坐标变换法是讨论黑洞辐射的一个非常有效的工具. 作者在动态黑洞的Hawking辐射上所做的这些研究进一步完善了乌龟坐标变换论, 标志着广义乌龟坐标变换法已经形成了一个比较完整的体系.

用作者在这里进一步发展了的Damour-Ruffini-Zhao-Wu-Cai方法，不仅可以讨论动态轴对称黑洞和非静态非球对称的任意加速Kinnersley黑洞中Dirac粒子的Hawking蒸发，而且原则上完全可以应用它去讨论具有非退化视界的任意时空的量子热效应，这一方法也易于推广去讨论任意自旋场的Hawking效应.

另外本文在稳态黑洞方面[第二、四章]的主要研究为:

1. 表明Kerr-Newman黑洞和Kerr-Sen黑洞背景上标量场方程在分量变量后的径向和角向部分都是广义椭球波方程，即合流的Heun方程;

2. 将Kerr-Newman黑洞外视界上的热力学四定律推广到内视界上，讨论了黑洞平衡辐射过程的量子守恒律，引入了约化视界面积和量子熵的概念.

本文除部分章节(例如第五章)在不同程度上参考了赵峥教授的著作《黑洞的热性质与时空奇异性: 零曲面附近的量子效应》外，在写作上主要参考了下述材料:

第二章主要基于下列材料:

S. Q. Wu and X. Cai, *J. Math. Phys.* **40** (1999) 4538-4548.
S. Q. Wu and X. Cai, “Massive Complex Scalar Field in the Kerr-Sen Geometry: Exact Solution of Wave Equation and Hawking Radiation”, submitted to *J. Math. Phys.*, [gr-qc/0107037].

第四章的第三、四节主要基于下列工作:

S. Q. Wu and X. Cai, *IL Nuovo Cimento*, **B115** (2000) 143-150.
S. Q. Wu and X. Cai, *Int. J. Theor. Phys.* **39** (2000) 2215-2220.
S. Q. Wu and X. Cai, “Four Quantum Conservation Laws on Black Hole Equilibrium Radiation Process and Quantum Black Hole Entropy”, [gr-qc/9903087].

第六章主要基于下列文章:

S. Q. Wu and X. Cai, *Int. J. Theor. Phys.* **40** (2001) 1349-1357.
S. Q. Wu and X. Cai, *Int. J. Theor. Phys.* **41** (2002) 559-567.
S. Q. Wu and X. Cai, *Mod. Phys. Lett.* **A16** (2001) 1549-1557.
S. Q. Wu and X. Cai, *IL Nuovo Cimento*, **B116** (2001) 907-914.

第七章主要基于下列工作:

Wu Shuang-Qing and Cai Xu, *Chin. Phys. Lett.* **18** (2001) 485-487.

S. Q. Wu and X. Cai, *Gen. Rel. Grav.* **33** (2001) 1181-1195.

S. Q. Wu and X. Cai, *Gen. Rel. Grav.* **34** (2002) 557-564.

S. Q. Wu and X. Cai, *Gen. Rel. Grav.* **34** (2002) 605-617.

S. Q. Wu and X. Cai, "Extra Spin-Rotation Coupling Effect in a Radiating Kerr Space-time", [gr-qc/0104074].

第八章主要基于下列材料:

S. Q. Wu and X. Cai, *Chin. Phys.* **11** (2002) No. 7 (to appear).

Wu Shuang-Qing and Cai Xu, *Chin. Phys. Lett.* **19** (2002) 141-143.

S. Q. Wu and X. Cai, *Int. J. Theor. Phys.* **41** (2002) 641-651.

S. Q. Wu and X. Cai, *Gen. Rel. Grav.* **34** (2002) No. 8 (to appear).

吴双清, 曾瑜, 蔡勖, "变加速直线运动黑洞中Weyl中微子的Hawking辐射", 已投稿到 物理学报.

第一章 黑洞物理学简介

"I'm trying to understand ...
the black hole in the sky.
Why? ...
It's another time,
It's another space ..."
A Monn, A Lear "Black holes"

§1.1 引言

黑洞最初被视为一颗死亡的星, 被认为是恒星演化的最终归宿. 后来人们发现黑洞有着丰富的内涵, 不仅有一般的力学性质, 而且有量子性质和热性质. 黑洞是天体演化的一个中间阶段, 而不是最终归宿.

黑洞物理学有着丰富多彩的历史, 提供了广义相对论、量子场论和热力学相互交融的独特大舞台, 它从一个单纯的几何理论发展成为一个包括量子论、相对论、统计物理、微分几何和天体物理学在内的多学科理论. 黑洞物理研究已成为多学科的交叉点, 其中的许多课题是当前科学研究的主要热点.

黑洞Hawking效应的发现打开了这个基础物理学宽广领域的一个小的角落, 成为这个领域一个重要的划时代的路标. 黑洞的Hawking蒸发是一个半经典的量子效应, 现在这个理论已经伴随我们28年了, 其理论的重要性用再多的语言也不嫌夸张. 自Hawking 效应发现以后, 经过近三十年的研究, 人们对Hawking辐射早已不抱怀疑态度了, 但是实验上目前尚未找到证明Hawking辐射的证据. 正如Hawking自己曾讲过的, 如果这个理论得到了实验验证, 那么他肯定会获得Nobel物理学奖.

这本论文讲述的的主要工作与英国两位最伟大的理论物理学家首次提出的最重要理论— Dirac方程和Hawking辐射有关. 今年是Dirac诞辰的100周年, 而Hawking 先生也刚过完他的60大寿. 本文的中心论题是发展广义乌龟坐标变换法, 用以探讨动态黑洞背景上Dirac粒子的Hawking辐射, 因此这本论文就显得有点特殊意义.

这一章将简单介绍黑洞物理学中与本文工作密切相关的基本理论,特别是黑洞附近的量子过程以及黑洞热力学等等.

黑洞的艺术创意画

图1 Penrose所描述的恒星塌缩为一个奇点的过程是对黑洞的最好的经典理论解释. 奇点被描绘成在黑洞深处的一个黑点,它是这样的致密,包括光在内的所有东西都不能逃脱它的引力场. 在外面的三条光线受到奇点和黑洞的引力作用而弯出,但它们最终还是逃脱了. 第四条光线恰好位于被陷获和能逃脱的临界状态之上. 在最里面的第五条光线则完全被陷获了,它永远不能再从黑洞逃脱.

§1.2 黑洞物理学简史

黑洞物理学从广义相对论和天体物理学中完全独立出来,形成一门崭新的学科,大约始于1986年. 1998年年底两位俄罗斯物理学家的合著《黑洞物理学: 基本概念与新的发展》的出版,是黑洞物理学史上的一件大事,它标志着这一学科已趋于成熟. 该书是在他们1989年出版的《黑洞物理学》基础上扩充改写的增订版,对这一领域作了最新的全面总结[1, 2].

黑洞物理学发展的历史阶段[1, 2]的划分尚是一个开放问题,对此还没有一致公论. 目前存在几种看法,下面分别介绍它们.


博士学位论文
DOCTORAL DISSERTATION

A. 第一种观点[1, 2]认为黑洞物理学的发展过程可划分为如下的历史阶段:

a) 前历史时期: 这一阶段起自于Michell和Laplace对黑洞这个思想的讨论, 终止于1916年. 天文爱好者Michell牧师在寄给Cavendish的一封信中首次导出了光线在引力场中的弯曲角, 这一点事实上形成了引力透镜理论的基础. Laplace则在十八世纪末用Newton引力理论考虑了这类天体存在的可能性. Schwarzschild于1916 年发表了Einstein场方程的一个解, 该解描述了一个静态非转动黑洞.

b) 古历史时期: 这一时期起自1916年, 止于1967年12月29日. 在这一时期稍晚的1963年, 澳大利亚数学家Kerr找到了Einstein的方程的一个真空解, 它描述一个转动黑洞. 在1967年底美国著名科学家Wheeler在纽约Hilton饭店的一次讲演中首次引入了"黑洞"这个术语.

c) 新历史时期: 这一时期始自Wheeler在1967年的讲演, 终于1986年. Zakharov [1]称这一时期为物理学的这个新领域的青年期, 而Frolov和Novikov [2]则称之为黑洞物理学发展的英雄时代. 这一时期的特征是相关的研究快速增长. Novikov和Frolov《黑洞物理学》的首版宣告了这一时期的结束. 需注意的是同一时期出版了Gal'tsov的颇有受益的俄文版单行本[3], Thorne与Price和Macdonald合著的英文版单行本[4](书中陈述了黑洞物理中的膜范式)以及Chandrasekhar于1983年的著名英文单行本[5].

d) 现代时期: 从1986年到现在. 这一时期在研究黑洞的理论与数学方面取得了辉煌成就. 但最重要的是, 在许多星际双星系统中发现了致密天体(几乎100%的可以肯定为黑洞). 另外在不同光谱范围内对活动星系核进行了深入的研究, 论证了其质量为太阳质量几百万倍的超重黑洞存在的必要性.

实际上在二十世纪六十年代后期, 黑洞从只是广义相对论专家的研究课题(在当时, 天文学家根本不考虑黑洞, 甚至在尊敬的学术团体中讨论黑洞是不受欢迎的)转变为天文学家和天体物理学家的日常研究课题.

B. 根据天文学上的兴趣, 人们认为黑洞的研究大致分成三个时期[6]:

(1) 1964 ~ 1975年是黑洞研究的第一个黄金时期(Thorne [7]称1963 ~ 1972年为黑洞研究的黄金时代), 其间最主要的成果有

- 黑洞动力学的四条定律

- 黑洞的吸积和发展
- 相对论效应(例如坐标系拖曳效应)
- 黑洞的量子效应(例如Hawking效应)

(2) 二十世纪七十年代末到八十年代末是长期准备阶段, 主要是

- 第一次测量恒量尺度下可能的黑洞的质量
- 黑洞吸积盘的X-射线谱的证认和模型

(3) 二十世纪九十年代初到现在是黑洞研究的新阶段, 主要工作是

- 建立了恒星尺度黑洞候选者的大量样本
- 在强引力场极限下广义相对论效应的观测

C. 纯粹从理论兴趣上来看, 我们认为黑洞物理学的研究出现了三次高潮:

★ 第一次是Einstein方程各种经典黑洞解(上世纪六十年代至1973年)以及黑洞动力学四定律, 这一时期可称为经典黑洞物理时期.

★ 第二次是Hawking辐射和黑洞热力学(1974年至上世纪八十年代末), Hawking的发现开创了黑洞物理研究的量子时代.

★ 第三次始于上世纪九十年代, 主要以黑洞熵的起源以及黑洞解作为低能量子弦态的研究为代表, 即黑洞解作为低能异质弦论唯象解的研究.

§1.3 四维黑洞解的分类

由于本文只研究四维黑洞情形, 在这一节中我们简单介绍与本文工作相关的四维(稳态与动态)黑洞解. 上世纪七十年代初, 四维稳态黑洞分类问题已被基本解决了. 按三个层次来表述, 这就是:

a) 稳态黑洞必定是轴对称的(转动黑洞).

b) 黑洞“无毛”(no hair)定理: 一般稳态黑洞的引力场只包含质量M、电荷Q和比角动量$a = J/M$.

c) 一般稳态黑洞的引力场由Kerr-Newman度规[8]描述, 其度规在Boyer-Lindquist坐标系[9]中为: [1]

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\Sigma}\big(dt - a\sin^2\theta d\varphi\big)^2 - \frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\big[adt - (\Sigma + a^2\sin^2\theta)d\varphi\big]^2 - \Sigma\big(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2\big)\,, \quad (1.3.1)$$

其中$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$, $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$.

按转动(角动量)和电荷可将四维黑洞划分为:

1) 静态球对称黑洞($a = 0$), 其线元为

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2}dt^2 - \frac{r^2}{\Delta}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\,. \quad (1.3.2)$$

a) 不带电的Schwarzschild黑洞($a = Q = 0$), $\Delta = r^2 - 2Mr$, 其视界位于$r_H = 2M$.

b) 带电的Reissner-Nordström黑洞($a = 0$, $Q \neq 0$), $\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2$, 其视界位于$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$.

2) 稳态轴对称(转动)黑洞($a \neq 0$)

a) 不带电的Kerr黑洞($Q = 0$, $a \neq 0$), $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$, 其视界位于$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$.

b) 带电的Kerr-Newman黑洞(为一般情形$Q \neq 0$, $a \neq 0$), 其视界位于$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$.

1982年Kasuya [10]给出了双荷(电荷Q、磁荷P)Kerr-Newman-Kasuya黑洞解, 其线元由(1.3.1)式给出, 只是其中的$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 + P^2$. 它是Kerr-Newman解的非Abel推广. 其实这个解在1975年早已由Yasskin [11] 得到.

Kerr-Newman-Kasuya解第一次包含了非Abel的SU(2)荷, 对经典"无毛"定理提出了挑战. 正如Bowick [12]指出的, 黑洞除了具有通常的质量、电荷和角动量三个参量以外, 是否还可以携带非Abel荷, 如QCD色荷, 目前尚不清楚.

新近的研究表明, 黑洞除了通常的"三毛"外, 尚可有其它毛发, 例如量子毛发, 膨胀(Dilaton)荷, 轴子(Axion)荷等. 王永久等[13-15]在引力与SU(5)大统一理论耦合的框架下给出了黑洞存在第四个参量$SU(3)_C$色荷的证据.

[1]注: 本文自始至终采用Planck单位制, 即$G = \hbar = C = k_B = 1$.

1992年Sen [16]从稳态Kerr解通过扭曲变换(twist)程序生成了异质弦论低能有效场论唯象的Kerr-Sen解(又称为twisted Kerr解), 在Einstein基中其线元取(1.3.1)式的形式, 但其中$\Delta = r^2 + 2(b-M)r + a^2$, $\Sigma = r^2 + 2br + a^2\cos^2\theta$. 这个解描述一个带有质量$M$, 电荷$Q$, 角动量$J = Ma$和磁偶极矩$\mu = Qa$的黑洞. 扭曲参数$b$通过关系式$b = Q^2/2M = M\tanh^2(\alpha/2)$与Sen所用的参数$\alpha$ 相联系.

随后不久, 人们又将这个解推广为带有轴子荷A_0和膨胀荷D_0的解[17]. 因为这个解包含Taub-NUT解作为其极限情形($a \to 0$), 所以通常人们不认为它是一个黑洞解.

以上我们介绍的黑洞解都是稳态的. 按Petrov的分类方案, Kerr-Newman黑洞属于Petrov D-型, 而Kerr-Sen黑洞属于Petrov II-型. 下面我们介绍动态黑洞, 这类黑洞是Einstein 场方程的"辐射"解.

1) 动态球对称黑洞[18], 其线元在超前或推迟的Eddington-Finkelstein(EF) 坐标系中为

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2}dw^2 + 2\epsilon dwdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\,, \tag{1.3.3}$$

其中当$\epsilon = 1, -1$时, $w = u, v$. 超前(入射)EF时间坐标为$v = t + r_*$, 推迟(出射)EF时间坐标为$u = t - r_*$, 黑洞质量M和电荷Q是超前时间v或推迟时间u的函数.

a) Vaidya黑洞, $\Delta = r^2 - 2Mr$.

b) Vaidya-Bonnor黑洞, $\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2$.

2) 动态轴对称黑洞[19–23], 其线元为

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\Delta}{\Sigma}\big(dw - a\sin^2\theta d\varphi\big)^2 + 2\epsilon dr(dw - a\sin^2\theta d\varphi) \\ &\quad - \frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\big[adw - (r^2 + a^2)d\varphi\big]^2 - \Sigma d\theta^2\,, \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

其中$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$, 当$\epsilon = 1, -1$时, $w = u, v$.

a) 动态Kerr黑洞, $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$.

b) 动态Kerr-Newman黑洞, $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$.

这些黑洞的度规线元与它们对应的稳(静)态黑洞在超前或推迟的EF坐标系中的形式基本相同, 只是其中的质量M和电荷Q是时间u或v的函数. 对于动态的转

动黑洞, 我们要求比角动量$a = J/M$为常数.

3) Kinnersley黑洞[24–26], 其度规线元在第八章中给出. 这个度规描写作加速运动的点质量的外部引力场, 可能与静态C-度规[27–30]有关系. 有带电的和不带电的两种版本.

4) 转动的Kinnersley黑洞[31], 这类度观描写加速和转动的点质量外部的引力场, 可能有稳态C-度规[27–30]有一定联系. 研究此类黑洞的现有文献较少, 本文也不讨论此类黑洞.

动态黑洞的Petrov分类: Vaidya-型黑洞与Kinnersley黑洞属于Petrov D-型, 而动态Kerr-Newman黑洞属于Petrov II-型. 转动Kinnersley黑洞的Petrov分类尚未见文献报道, 我们猜测它可能属于Petrov II-型, 因为当其中的加速参数消失时它可回到动态Kerr-Newman黑洞情形, 而当其中的转动参数为零时, 它又可回到变加速Kinnersley 黑洞情形.

类比Kasuya的工作, 除电荷参量外人们可以在这些黑洞解中引入磁荷参数. 除Kerr-Sen 黑洞外, 人们也可以在这些解中引进宇宙学常数Λ.

§1.4 稳态黑洞视界附近的效应

本节简单介绍发生在黑洞事件视界附近的经典过程和量子效应. 黑洞的量子效应包括非热辐射和热辐射以及真空极化. 非热量子效应包括Misner超辐射和Starobinsky-Unruh 过程. Misner超辐射是一种受激辐射, 而Starobinsky-Unruh过程是一种自发辐射, 这两者都是非热辐射. 量子热效应即Hawking辐射, 又称Hawking-Unruh效应, 这里只作简单介绍, 在后面的章节中另有详细讨论.

1. 经典效应— Penrose过程

Penrose过程[32, 33]是从转动黑洞的能层中提取黑洞转动能量的过程. 在无穷远处的观测者看来, 转动黑洞的能层中存在经典的负能轨道. 一个正能物体从无穷远处来到能层后分成两块, 其中一块沿负能轨道运行并落入黑洞, 另一块重新飞回无穷远处. 转动黑洞吸收负能物体后能量降低, 损失的能量是其转动能, 而出射到无穷远的物体, 能量会增加, 这是由能量守恒定律所保证的.

研究表明, 在Penrose过程中, 黑洞的角动量减少但面积反而增加, 不违背面积

不灭定理. Penrose过程的最终结局是使黑洞停止转动, 即它使稳态黑洞退化为静态黑洞. 提取黑洞的转动能量除Penrose过程外, Blandford和Znajek [34]提出了不同的方案, 称为Blandford-Znajek过程, 它受到了天文学家们的极大重视[35].

对于带电的黑洞, 虽然不一定有能层存在, Ruffini等[36–38]提出了可以提取黑洞Coulomb电磁能的方法.

2. 受激辐射— 超辐射

Penrose过程的量子对应(波动类似), 又称为超辐射散射[39–43], 它允许用一个相当简单的方式从黑洞提取能量. 超辐射现象也完全可以用经典术语加以理解.

Misner [39]证明, 当入射波(标量波、电磁波或引力波)的频率满足

$$\text{无质量情形：} \qquad 0 < \omega \leq m\Omega_H + e\Phi_H$$

$$\text{有质量情形：} \qquad \mu_0 < \omega \leq m\Omega_H + e\Phi_H$$

时, 入射波穿过能层返回后成为的出射波会得到增强. 上式中的μ_0、m和e分别是入射波量子的静质量、角动量磁量子数和电荷, $\Omega_H = a/(r_H^2 + a^2)$和$\Phi_H = Qr_H/(2Mr_H - Q^2)$分别是黑洞视界的角速度和静电势. Misner超辐射实际上是一种受激辐射. 在该过程中, 黑洞的转动能和Coulomb电磁能均可被提取而使角动量和电荷减少, 但黑洞的面积并不减少.

对于没有能层的带电Reissner-Nordström黑洞, 超辐射现象对于Bose场也存在. 有趣的是, 对于Fermi场则没有超辐射效应[44–50].

3. 自发辐射

与激光作用原理类似, 黑洞既然允许受激发射, 也就应当允许粒子的自发发射, 这就是所谓的Starobinsky-Unruh过程[43, 45]. 粒子的自发产生发生在黑洞的视界之外, 其机制类似于平直时空中的Klein机制.

研究表明, 稳态黑洞视界的角速度和电势会导致视界附近Dirac真空的正负能级发生交错[51, 52]. 当$\omega_H = m\Omega_H + e\Phi_H$大于粒子静质量$\mu_0$时, 在视界附近的能层内才能发生正负能级交错. 在正负能态之间隔着一个禁区, 禁区里不能有任何粒子存在. 当产生能级交错时, 真空中的虚粒子对将通过量子隧道效应穿过禁区而实化为真实粒子. 这种粒子对产生的过程, 是与超(受激)辐射相应的自发辐射, 辐射粒子的能量范围与受激辐射一致,

$$\mu_0 < \omega \leq \omega_H = m\Omega_H + e\Phi_H \,.$$

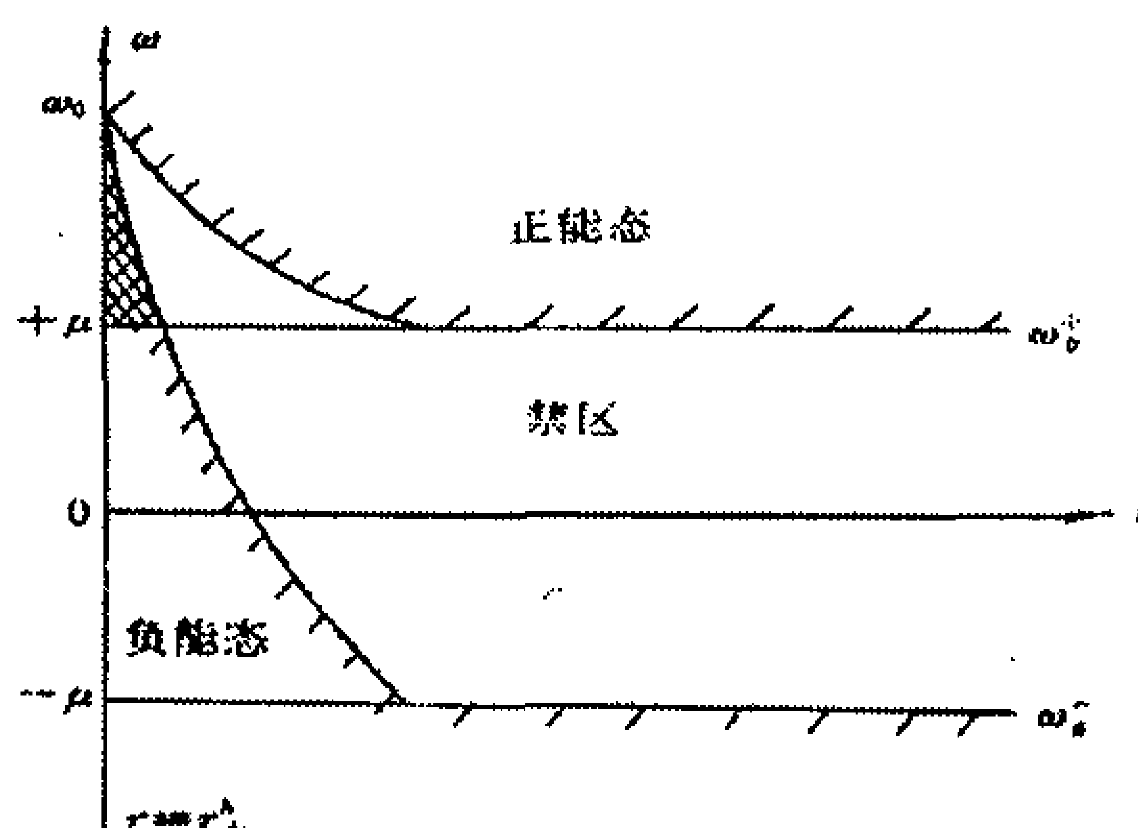


图2 黑洞视界附近Dirac真空的正负能级交错

自发辐射也会导致黑洞转动能与电磁能的减少, 使黑洞角动量和电荷减少, 但面积不会减少.

受激辐射与自发辐射都是非热辐射, 与黑洞的温度无关. 非热辐射[53, 54]的终态是Schwarzschild黑洞, 因此通常又把Schwarzschild黑洞看作基态黑洞, 而把转动、带电的黑洞看作黑洞的激发态. Penrose过程和非热辐射过程都遵守Hawking的面积定理.

黑洞的总质能可以分为三个部分[55, 56]: 与角动量相联系的转动能, 与电荷相联系的Coulomb电磁能以及静质量能量(不可约质量). Christodoulou [55]证明, 前两种形式的能量可以从黑洞中提取出来, 而第三种是不可减少的. 这个不可约能量对应着黑洞的面积.

4. Hawking辐射:

有可能存在另外一种热辐射量子而使黑洞的不可约质量通过"蒸发"而逐渐减少的过程称为Hawking过程[57–59]. 处于基态的Schwarzschild黑洞没有上述非热效应, 在Hawking效应发现以前, 它仍被视为恒星演化的最终归宿. 1973年Hawking [57] 证明黑洞有热辐射, 不仅稳态Kerr-Newman黑洞有, 而且静态Schwarzschild黑洞也有. 以后, Unruh [60, 61]证明了在平直时空作加速运动的Rindler观测者也会探测到热辐射的粒子流. 从等效原理的角度来看, Hawking辐射和Unruh效应实质上是等价的, 因此也有人称这个效应为Hawking-Unruh效应.

非热辐射与温度无关, 遵守面积定理, 在辐射过程中电荷和角动量不断减少而面积继续增长. Hawking效应是黑体辐射, 是标准的热辐射, 不遵守面积定理, 在辐射过程中黑洞质量减小, 面积会缩小. Hawking效应的发现表明Schwarzschild黑洞不是恒星演化的最终结局, 而只是天体演化的一个阶段.

黑洞辐射出热谱粒子的过程通常又被称为Hawking蒸发、Hawking辐射或Hawking效应等等. 在过去的四分之一个世纪中, 稳态黑洞Hawking辐射的方方面面已被人们详尽地研究过了[2, 62]. 文献[63, 64]对Hawking辐射作了一般性综述, 考察了加速效应和黑洞蒸发, 用对产生的语言详细分析了Hawking辐射发生的机制, 它强调的两个中心要素是存在视界和真空涨落稳定地转化为粒子(产生机制). Benachenhou [65]的博士学位论文考察了与黑洞蒸发相关的论题. 文献[66]也对同一论题作了简介.

理论上人们对Hawking辐射已不再抱怀疑态度了, 但是实验上到目前为止尚未能给予验证. 本文对Hawking辐射的详细讨论见后面的章节, 包括新的可能检测Hawking辐射的实验方案.

与Hawking辐射相关的两个重要问题是黑洞信息丢失和奇性问题. 目前这两个问题是当前研究的热门话题, 它们的最终解决有可能给人们展现出一个新的量子时空观和找到一个全新的量子引力理论. 超弦理论由于能够揭示Planck尺度上的物理, 使解决这两个难点出现了一丝曙光.

5. 真空极化

上面介绍的效应都是粒子的产生过程, 但是粒子产生并不穷尽所有可能的量子效应. 如果真空中的虚粒子对并不实化为真实粒子, 虚粒子的能态也会在外场中受到影响, 结果对局部观测者来说, 能动张量真空平均值会随外场而改变, 这个效应称为真空极化效应. 人们对黑洞真空极化效应已有比较成熟的研究[62, 67–71], 请参考Frolov和Novikov的标准教科书[2], 这里不作任何讨论.

6. 其他现象

黑洞的准正则模(quasi-normal mode) [72–74]和渐近"幂律"尾(power-law tail) [75, 76]的研究在近几年中受到较多的关注. 它们有可能成为证认黑洞存在的"指印"(finger print).

博士学位论文
DOCTORAL DISSERTATION

§1.5 黑洞热力学

黑洞决非是一种只是永久地隐藏物质而毫无生气的物体. 由于它具有质量、电荷和角动量这三个参量, 黑洞是一个动力学系统. 因此研究支配黑洞演化的定律并与热力学定律作比较, 是有重要意义的.

1973年Bardeen, Carter和Hawking [77]给出了与通常热力学定律极为相似的黑洞动力学四定律, 但他们同时慎重地指出不能把黑洞温度看作真实的温度, 因为黑洞没有热辐射. 但是在1974年Hawking用量子效应[57]证明了黑洞的确有辐射, 温度也是真实的. 因此人们又称黑洞动力学定律为黑洞热力学定律[78-82].

(1) **第零定律**: 稳态黑洞视界的表面引力(温度)是一个常数.

(2) **第一定律(能量守恒)**: 稳态黑洞的总质能、总角动量以及总电荷都守恒. 在黑洞演化过程中, 质量、角动量和电荷都作为面积(熵)和表面引力(温度) 的函数而变化. 第一定律可表述为Bekenstein-Smarr微分质量公式[83, 84]:

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\delta A + \Omega\delta J + \Phi\delta Q \tag{1.5.1}$$

和积分关系式

$$M = \frac{\kappa}{4\pi}A + 2\Omega J + Q\Phi\,. \tag{1.5.2}$$

(3) **第二定律**: 又称为Hawking面积(不灭)定理, 它断言黑洞的表面积(熵)决不随时间减少[85].

$$\delta(S_{\rm BH} + S_{\rm M}) \geq 0\,, \tag{1.5.3}$$

式中$S_{\rm M}$为黑洞周围物质的熵.

(4) **第三定律**: 又称为Nernst定理, 认为不可能经过有限次操作把视界的表面引力(温度)减小到零. 极端黑洞是表面引力为零的黑洞. 按照第三定律, 极端黑洞是自然界里不可达到的极限. 因此, 这个定律是说不能通过有限步骤, 把非极端黑洞变成极端黑洞.

由于对黑洞熵[86-95] 起源问题的研究[96-106], 人们对Nernst定理的理解存有很大争议[107], 至少有三派不同的观点存在. 关于黑洞熵的起源与热力学第三定律, 目前尚未有达成一致的观点. 这两个问题的研究是当前黑洞热力学中的焦点, 其最终解决有可能需要弦论来回答.

黑洞热力学的四个定律通常是针对外视界而言的. 我们在假定整个黑洞时空由Kerr-Newman 度规描述的前提下, 将它们推广到内视界上[108]. 对于黑洞的内视界表面, 赵峥等[109-111]曾提出类似于Smarr质量公式的关系式, 并试图用以解决Nernst定理中出现的矛盾[107].

在详细讨论Hawking辐射理论之前, 在下一章中先研究黑洞背景上标量场方程的精确解这个数学问题. 精确解的研究不仅在数学上非常重要, 如果我们一旦获得了有关它的详尽知识, 将对许多黑洞物理问题的研究有不少益处.

第二章 转动黑洞背景上场方程的精确解

> *"It is not possible to write the solutions to the radial equation in terms of* ***known*** *functions, though the properties of the solutions have been extensively investigated".*
> Birrell & Davies, 1982

§2.1 前言

在数学物理以及黑洞物理学中，研究各种波方程例如Klein-Gordon方程，Dirac方程和Maxwell方程在一个特定黑洞背景上的精确解具有相当的重要性. 知道了一些精确解的明显表达式无疑对作下列研究有很大的帮助，例如构造Schwarzschild黑洞内部的Feynman Green函数[112]，Kerr度规背景上的二次量子化[45]，研究Kerr(-Newman) 黑洞准正则模[74, 113, 114]，计算Kerr(-Newman)-de Sitter黑洞的吸收率[115]，检查Kerr黑洞与Kerr-Newman-de Sitter时空的稳定性[116, 117]，以及考察黑洞微扰[118–121]和束缚态[67, 122–131]等等. 长期以来，人们在一直不懈地努力寻求精确解. 因此，简要地回顾关于量子场方程在某些已知的黑洞时空背景中里精确解方面的研究是非常有意义的.

1982年Birrell与Davies [132]在他们的经典著作《弯曲时空中的量子场》一书中写道："不可能用已知的特殊函数写出径向方程(8.2)的解$R_{\omega\ell}(r)$，尽管其解的性质得到了详尽考察..." (也请见文献[133, 134]). 他们所指的径向方程是Schwarzschild时空中无质量的Klein-Gordon方程分离变量后的径向部分. 在此之前，黑洞背景上波方程角向部分的精确解早已获得了大量的研究，并且被命名为"自旋权重的角向椭球波函数" [135–143]. 但是对于几乎所有从事黑洞物理研究的人们来说，其径向部分的精确解[47, 49, 144–153]是不知道的. 在1982年之前，人们认为径向波方程与已知的数学物理微分方程无关[133, 134].

这种情况在第二年立即发生了改变. Blandin, Pons及Marcilhacy [154]证明了

自旋权重椭球波函数可以通过一个初等变换从合流Heun函数得到，同时他们也注意到Teukolsky主方程[5, 135, 155–158]的径向部分和角向部分都是一个单一的线性常微分方程的特殊形式. 在与Gibbons的一封私人通信中, Jensen 和Candelas [159]获知Schwarzschild时空中无质量标量场方程的径向部分与合流Heun函数仅差一个乘子.

下一个重要的进展来自Leaver的工作[160]. 他证明了Teukolsky主方程[5, 135, 155–158]的径向、角向部分都是同一类型的方程, 即广义椭球波方程[160–162]. 特别地, 他把广义椭球波方程的解按超几何函数和合流超几何函数作了展开. 最近我们表明Kerr-Newman黑洞和Kerr-Sen黑洞背景上有质量带电的标量场方程的径向、角向部分均可以变换为一个广义椭球波方程[163, 164].

最重要的进展来自新近的研究, 该项研究揭示广义Teukolsky主方程, 广义椭球波方程与Heun方程之间的联系. Suzuki, Takasugi和Umetsu [165]研究了Kerr-de Sitter时空的微扰, 以及Kerr(-Newman)-de Sitter几何中Teukolsky主方程的解析解, 表明了广义Teukolsky主方程实际上与Heun早在1889年引入的Heun方程[166, 167]密切相关. 他们证明了当宇宙学常数趋于零时, 广义椭球波方程成为合流Heun方程. 文献[135–143]和[168, 169]研究了Teukolsky主方程的解析解, 转动黑洞背景上场的积分方程在文献[170]中已得到了考察, 文献[171–173]给出了Heun函数的积分方程.

通过这些研究, 人们已清楚地知道Kerr-Newman-de Sitter时空中的广义Teukolsky 主方程可以改写为广义椭球波方程的形式, 后者实质上就是一个Heun方程. 类似地, 可以证明在有宇宙学常数的一般D-型真空背景(即稳态C-度规解[27])上的广义Teukolsky方程[119–121]可以变换为一个Heun方程. 此外, 需提到的是Couch [174]的工作, 他在一些特殊的条件下把分离变量的径向方程变换为修正的Whittaker-Hill方程.

先前的关于Kerr(-Newman)时空中有质量标量波方程的解已在文献[175–177]中作了不同的研究. 在最近的一篇文章[163]中, 我们考察了Kerr-Newman黑洞背景上有质量复标量场方程的精确解. 将这个工作推广到Kerr-Sen 黑洞背景[16, 17]上标量波方程的精确解[164], 也是饶有兴趣的.

§2.2 Kerr-Newman黑洞背景上有质量复标量场方程的精确解

在本节中我们把Kerr-Newman黑洞几何中的协变Klein-Gordon标量场方程分离变量成为径向和角向两部分. 我们发现, 在非极端情形, 这两个方程属于广义(推广的)自旋权重的椭球波方程, 然后用积分的形式给出了一般的精确解, 同时也给出了在物理上有兴趣的几个特殊解; 在极端情形, 径向方程可以变换为广义的Whittaker-Hill方程. 在非极端情形下, 我们给出一般解的幂级数展开式中系数之间的三项递推关系式. 另外, 还讨论了在这两种情形下径向方程之间的联系.

§2.2.1 引言

自从黑洞的Hawking效应[57, 178–180]发现以后, 人们在多种坐标系里用了各种不同的方法, 例如路径积分法[181], 乌龟坐标变换[182, 183]及解析延拓法[51, 182]等等, 对黑洞蒸发进行了大量的研究. 在这些方法之中, 以广义乌龟坐标变换法在讨论中应用得非常广泛, 它不仅可以用于静态、稳态黑洞的蒸发, 而且也可以用于动态黑洞的蒸发, 并且取得了很大的成就[51]. 但是这一方法不能给出径向方程的精确解, 对径向波函数只能作近似的渐近分析.

Couch [174]在某些特殊条件下通过把分离变量的径向方程变换为修正的Whittaker-Hill方程而得到了一系列的精确解. 但是这些解似乎与讨论黑洞蒸发无关.

广义椭球波方程的解在一定程度上已有所研究[137, 160–162]. 在正则奇点附近, 作幂级数展开, 可得到系数之间的三项递推关系, 后者可以用连分数法处理. Leaver [160]已证明Kerr几何中的Teukolsky主方程事实上就是自旋权重的广义椭球波方程.

显然获得径向方程的一个精确解非是常重要的, 因为它对于讨论黑洞的Hawking 效应是至关重要的. 然而要得到一个精确解又是非常困难的, 这一动机产生了文[163]中所作的研究, 其主要目的是要证明Kerr-Newman黑洞(KNBH)背景上的有质量的协变Klein-Gordon方程在分离变量后的径向部分是一个虚数阶的自旋权重的广义椭球波方程. 下面我们将讨论三参量KNBH几何中的有质量复标量场方程的解. 在非极端情形, 其分离变量部分的一般解就是自旋权重的广义椭球波函数[137, 143, 160–162, 175]. 我们给出了径向方程在物理上有

兴趣的某些特殊解. 在极端情形下, 对径向方程的一般解只作了简单的讨论. 最后我们证明了极端情形下的径向方程可以由非极端情形下的径向方程通过合流而得到.

§2.2.2 Klein-Gordon方程的分离变量与角向方程的解

这一小节先处理KNBH背景上无源复标量场的分离变量以及角向部分的解, 然后在非极端情形和极端情形求解径向方程. 在把径向方程化为标准形式后, 我们得到一般解和特殊解(包括$\omega = \mu_0 = 0$的情形), 并导出了幂级数形式解的系数之间的三项递推关系式, 讨论了这两种情形下径向方程之间的联系. 另外在非极端情形下, 我们给出了解的积分关系式和某些物理上有兴趣的特殊解.

在Boyer-Lindquist坐标系中[9, 80, 184], Kerr-Newman黑洞的线元和电磁势1-形式可写为

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\Delta}{\Sigma}\big(dt - a\sin^2\theta d\varphi\big)^2 - \Sigma\big(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2\big) \\ &\quad -\frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\big[adt - (r^2+a^2)d\varphi\big]^2, \qquad (2.2.1) \\ \mathbf{A} &= \frac{Qr}{\Sigma}\big(dt - a\sin^2\theta d\varphi\big), \qquad (2.2.2) \end{aligned}$$

其中事件视界函数$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$, $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$. 质量$M$, 电荷$Q$以及比角动量$a = J/M$为描述KNBH的三个参量.

KNBH度规张量的行列式为$g = \det(g_{\mu\nu}) = -\Sigma^2\sin^2\theta$. 电磁四矢势$\mathbf{A}_\mu$显然满足如下协变的Lorentz规范条件:

$$\nabla_\mu \mathbf{A}^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\mathbf{A}_\nu) = 0\,. \qquad (2.2.3)$$

在弯曲时空中, 一个质量为μ_0、带电荷e的无源的标量场Φ遵守下述协变的Klein-Gordon方程(KG):

$$(\Box_c + \mu_0^2)\Phi = 0\,, \qquad (2.2.4)$$

式中的d' Alembert算符$\Box_c$在KNBH背景上表为

$$\begin{aligned}
\Box_c &\equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}D_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}D_\nu) \\
&= \frac{-1}{\Sigma}\Big\{\frac{-1}{\Delta}\big[(r^2+a^2)\partial_t + a\partial_\varphi + ieQr\big]^2 + \partial_r(\Delta\partial_r) \\
&\quad +\big(a\sin\theta\partial_t + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi\big)^2 + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta)\Big\}, \qquad (2.2.5)
\end{aligned}$$

此处规范协变的微分算符为$D_\mu = \partial_\mu - ie\mathbf{A}_\mu$.

KG方程(2.2.4)中的标量波函数Φ有分离变量形式的解$\Phi(t,r,\theta,\varphi) = R(r)S(\theta)$ $e^{i(m\varphi-\omega t)}$, 因此我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta}\big[\omega(r^2+a^2) - eQr - ma\big]^2\Phi + \partial_r(\Delta\partial_r\Phi) - \mu_0^2\Sigma\Phi \\
&\quad -\big(a\omega\sin\theta - \frac{m}{\sin\theta}\big)^2\Phi + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta\Phi) = 0\,. \qquad (2.2.6)
\end{aligned}$$

该方程分离变量的结果为径向部分

$$\begin{aligned}
&\partial_r[\Delta\partial_r R(r)] + \Big\{\frac{[\omega(r^2+a^2) - eQr - ma]^2}{\Delta} \\
&\quad -\mu_0^2(r^2+a^2) - \lambda + 2ma\omega\Big\}R(r) = 0 \qquad (2.2.7)
\end{aligned}$$

和角向部分

$$\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta[\sin\theta\partial_\theta S(\theta)] + \big[\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta} + (\mu_0^2 - \omega^2)a^2\sin^2\theta\big]S(\theta) = 0\,, \qquad (2.2.8)$$

其中λ为一个分离变量常数.

角向部分的一般解是自旋权重为零的普通的角向椭球波函数[175, 185], 或称为Legendre波函数. 当$a^2(\omega^2-\mu_0^2) = 0$时, 它们退化Legendre球函数.

令$x = \cos\theta$, $S(\theta) = S(x) = (1-x^2)^{m/2}\Theta(x)$后, 方程(2.2.8)取下述形式

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)S''(x) - 2xS'(x) + \big[\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \\
&\quad +a^2(\omega^2-\mu_0^2)(x^2-1)\big]S(x) = 0 \qquad (2.2.9)
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)\Theta''(x) - 2(1+m)x\Theta'(x) + \big[\lambda - m(m+1) \\
&\quad +a^2(\omega^2-\mu_0^2)(x^2-1)\big]\Theta(x) = 0\,, \qquad (2.2.10)
\end{aligned}$$

此处及以后，我们记$S'(x) = \partial S(x)/\partial x$等等.

方程(2.2.9)和(2.2.10)的本征函数为广义椭球波函数[137, 143, 160–162, 175] $S(x) = S_\ell^{m,0}(c,x)$且具有本征值$\lambda = \lambda_{m\ell} + c^2$, $c^2 = a^2(\mu_0^2 - \omega^2)$. 当$\mu_0 = 0$时，方程(2.2.9)和(2.2.10)是下述自旋权重为s的广义椭球波函数的特殊情形($s = 0$) [137, 143, 160–162, 175, 185]:

$$
\begin{aligned}
(1-x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \big[a^2\omega^2x^2 - 2a\omega sx \\
-\frac{(m+sx)^2}{1-x^2} + s + \lambda'\big]P(x) = 0
\end{aligned}
\tag{2.2.11}
$$

和

$$
\begin{aligned}
(1-x^2)Q''(x) - 2[s+(1+m)x]Q'(x) + \big[\lambda' - 2a\omega sx \\
-(m-s)(m+s+1) + a^2\omega^2x^2\big]Q(x) = 0\,,
\end{aligned}
\tag{2.2.12}
$$

式中$P(x) = (1-x)^{|m+s|/2}(1+x)^{|m-s|/2}Q(x)$和$x = \cos\theta$.

当$a\omega = 0$时，上述方程的解为Jacobi超球D-函数[175, 185] $D^\ell_{m,s}(x)$，或者称为自旋权重的球谐函数[143, 186–192]，且具有本征值为$\lambda' = \ell(\ell+1) - s(s+1)$, $\ell = \max(|m|, |s|)$.

在一般情形，这些解应为广义自旋权重椭球波函数[137, 143, 160–162, 175] $P(x) = P^\ell_{m,s}(c,x)$, $c^2 = -a^2\omega^2$. 在考虑到一定的合理边界条件后，这些解应成为一套正交多项式.

下面我们将假定所有参数M, Q, a, μ_0, e, m均不为零，分非极端($M^2 \neq a^2 + Q^2$)和极端($M^2 = a^2 + Q^2$)两种情形来讨论径向方程(2.2.7)，然后再讨论特殊情形($\omega = \mu_0 = 0$).

§2.2.3 非极端情形($M^2 \neq a^2 + Q^2$)下径向方程的解

A. 在$\varepsilon \neq 0$情形下径向方程的化简

在此情形下，设$\varepsilon = \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$, $(0 < \varepsilon < M)$. 作变量代换$r = M + \varepsilon z$后，内外视界分别位于$r_\pm = M \pm \varepsilon$, $(z = \pm 1)$. 再作变换$R(r) = R(z) = (z-1)^{i|B+A|/2}(z+1)^{i|B-A|/2}F(z)$后，径向方程(2.2.7)可化为如下标准形式:

$$\begin{aligned}&(z^2-1)R''+2zR'+\big[\varepsilon^2(\omega^2-\mu_0^2)(z^2-1)\\&+2\varepsilon(A\omega-M\mu_0^2)z+\frac{(Az+B)^2}{z^2-1}-2eQM\omega\\&+(2\omega^2-\mu_0^2)(2M^2-Q^2)-\lambda\big]R=0\,,\qquad(1<z<\infty)\qquad(2.2.13)\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&(z^2-1)F''+2[iA+(1+iB)z]F'+\big[\varepsilon^2(\omega^2-\mu_0^2)(z^2-1)\\&+2\varepsilon(A\omega-M\mu_0^2)z-2eQM\omega+(2\omega^2-\mu_0^2)(2M^2-Q^2)\\&-\lambda+A^2-B^2+iB\big]F=0\,,\qquad(1<z<\infty)\qquad(2.2.14)\end{aligned}$$

式中$A=2M\omega-eQ$, $\varepsilon B=\omega(2M^2-Q^2)-eQM-ma$.

为了研究方程(2.2.13)和(2.2.14)的解在区间$(-1<z<1)$的行为, 在作代换$z=\cosh T=\cosh(i\tau)=\cos\tau$后, 我们首先将实轴$T$转动到虚轴$\tau=-iT$上, 再回到实$z$-轴$z=\cos\tau$上, 那么这两个方程在区间$(|z|<1)$内的对应形式为

$$\begin{aligned}&(1-z^2)R''-2zR'+\big[\varepsilon^2(\omega^2-\mu_0^2)(z^2-1)\\&+2\varepsilon(A\omega-M\mu_0^2)z-\frac{(Az+B)^2}{1-z^2}-2eQM\omega\\&+(2\omega^2-\mu_0^2)(2M^2-Q^2)-\lambda\big]R=0\,,\qquad(|z|<1)\qquad(2.2.15)\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&(1-z^2)G''-2[A+(1+B)z]G'+\big[\varepsilon^2(\omega^2-\mu_0^2)(z^2-1)\\&+2\varepsilon(A\omega-M\mu_0^2)z+(2\omega^2-\mu_0^2)(2M^2-Q^2)\\&-2eQM\omega-\lambda+A^2-B^2-B]G=0\,,\qquad(|z|<1)\qquad(2.2.16)\end{aligned}$$

其中我们作了函数代换: $R(z)=(1-z)^{\frac{|B+A|}{2}}(1+z)^{\frac{|B-A|}{2}}G(z)$.

这样处理的实质是, 我们先将z的域值从实轴扩充到复z-平面$z=x+iy$上, 然后在复z-平面上将其从单位圆外$(|z|>1)$解析延拓到单位圆内$(|z|<1)$. 操作的结果是仅导数项改变了一个负号, 而非导数项即方括号内的项不变号. 这个方法等价于, 先解方程(2.2.13)-(2.2.16), 然后在复z-平面上作解析延拓.

方程(2.2.13-2.2.14)和(2.2.15-2.2.16)都是广义的自旋权重的椭球波方程[137, 143, 160–162, 175], 前两者是虚数阶的, 而后两个方程却是实数阶的. 前者特别

适合于研究散射问题，而后者更方便于考察束缚态能级. 而且我们可以明显找出散射幅的极点和束缚态能级之间的联系. 实际上方程(2.2.13)和(2.2.14)中z的取值区域是在x-轴上，而方程(2.2.15)和(2.2.16)中的则是在y-轴上. 所以这些方程可以看作是等价的. 然而为了讨论方便起见，我们作了一个限制，让方程(2.2.13)和(2.2.14)中的z在$1 < z < \infty$内取值，而让方程(2.2.15)和(2.2.16)的z在$|z| < 1$内取值.

当$\mu_0 = 0$时，假如$R_1(z_1)$是方程(2.2.15)在$|z| < 1$ 区间的一个解，那么该方程在$|z| > 1$区间的另一个解$R_2(z_2)$应为

$$
\begin{aligned}
R_2(z_2) &= (z_2-1)^{\frac{|B+A|}{2}}(z_2+1)^{\frac{|B-A|}{2}} \\
&\quad \times \int_{-1}^{+1} e^{i\varepsilon\omega z_2 z_1}(1-z_1)^{\frac{|B+A|}{2}}(1+z_1)^{\frac{|B-A|}{2}} R(z_1)dz_1 \,. \qquad (2.2.17)
\end{aligned}
$$

此处，我们已假定$\omega > 0$. 积分方程(2.2.17)把非正则解$R_2(z_2)$ 与正则解$R_1(z_1)$联系了起来.

比较方程(2.2.9-2.2.12)与(2.2.13-2.2.16)，特别是(2.2.11, 2.2.12)与(2.2.15,2.2.16)我们可以得出这样一个结论，即分离变量后的径向方程和角向方程都是同一类型的常微分方程— 广义的自旋权重的椭球波方程[137, 143, 160–162, 175]. 另外我们发现当$\mu_0 = 0$时，ε, A和B分别对应于$-a$, $-s$, $-m$. 在奇点$z = \pm 1, \infty$处广义椭球波方程可以有三对幂级数解. 加上适当的边界条件后，椭球波函数的这些幂级数展开可以截止为多项式解.

下面我们将仅研究广义的自旋权重的椭球波方程. 对这个方程感兴趣的读者可以在文献[137, 160–162]中找到更多的信息.

B. 径向方程的一般解($\varepsilon \neq 0$)

我们要研究的标准的广义自旋权重的椭球波方程为

$$
\begin{aligned}
&(1-z^2)W''(z) - 2[\alpha + (\beta+1)z]W'(z) \\
&\quad + \left[\gamma^2(z^2-1) + 2\delta z + \bar{\lambda} - \beta\right]W(z) = 0 \,, \qquad (2.2.18)
\end{aligned}
$$

其中$\bar{\lambda}$为一个重新定义的本征值，能使$W(z)$在$z = \pm 1$ 处有限，z的取值域可以是整个复z-平面.

(i) 对于径向方程(2.2.16)，有

$$\alpha = A, \beta = B, \gamma^2 = \varepsilon^2(\omega^2 - \mu_0^2), \delta = \varepsilon(A\omega - M\mu_0^2)\,;$$



(ii) 对于角向方程(2.2.12), 有

$$\alpha = s, \beta = m, \gamma^2 = a^2\omega^2, \delta = -as\omega\,;$$

(iii) 对于角向方程(2.2.10), 有

$$\alpha = 0, \beta = m, \gamma^2 = a^2(\omega^2 - \mu_0^2), \delta = 0\,.$$

在Laplace变换和参量$\alpha, \beta, \gamma^2, \delta, z$变换为$-\alpha, \beta, \gamma^2, -\delta, -z$下, 方程(2.2.18)的形式均不变, 即$W(z) = W(\alpha, \beta, \gamma, \delta; z)$满足下述积分方程

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-tz} W(\alpha, \beta, \gamma, \delta; z) dz &= W(\frac{\delta}{\gamma}, -\beta, \gamma, -\alpha\gamma; \frac{t}{\gamma}) \\ &= W(\frac{-\delta}{\gamma}, -\beta, \gamma, \alpha\gamma; \frac{-t}{\gamma})\,, \end{aligned} \qquad (2.2.19)$$

$$\begin{aligned} W(\alpha, \beta, \gamma, \delta; z) &= W(-\alpha, \beta, \gamma, -\delta; -z) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\gamma z t} W(\frac{-\delta}{\gamma}, -\beta, \gamma, \alpha\gamma; t) dt\,. \end{aligned} \qquad (2.2.20)$$

上述公式是方程(2.2.18)的积分解, 如果知道了一个解, 则通过积分变换(2.2.19)和(2.2.20)可得到另一个解. 显然在条件$\alpha = \delta = 0$, $(\gamma \neq 0)$下, 解是对称的, 这正是情形(iii). 这时, 对称解为常椭球角向波函数[185].

现在我们考虑广义椭球波函数(2.2.18)在区间$-1 < z < 1$内的一个幂级数解. 按照常微分方程理论, 我们知道方程(2.2.18)有两个正则奇点($z = \pm 1$)和一个合流非正则奇点($z = \infty$). 为方便起见, 将方程(2.2.18) 改写为如下形式:

$$\begin{aligned} &(1 - z^2) W_n''(z) - 2[a + (b+1)z] W_n'(z) \\ &\quad + \big[c^2(z^2 - 1) + 2dz + \lambda_n - b\big] W_n = 0\,, \quad (-1 < z < 1) \end{aligned} \qquad (2.2.21)$$

方程(2.2.21)在正则奇点$z = 1$和$z = -1$处的指标分别为$\rho_- = 0, -(a+b)$和$\rho_+ = 0, a - b$. 当$c, d \to 0$时, $W_n(z)$一定趋于Jacobi多项式.

首先, 我们引入一个符号$\epsilon = \mp 1$, 并记两个正则奇点为$z = \pm 1 = -\epsilon$, 然后在正则奇点$z = -\epsilon$邻域作幂级数展开

$$W_n(z) = e^{-cz} \sum_{n=0}^{\infty} f_n (1+\epsilon z)^n . \tag{2.2.22}$$

将上述正则幂级数解代入方程(2.2.21), 可以得到自旋权重椭球波方程(2.2.21)在正则奇点处幂级数展开式中系数之间的三项递推关系

$$\begin{aligned}
&(1+b-\epsilon a)f_1 + [\lambda_0 + 2ac - b - 2\epsilon(bc+c+d)]f_0 = 0 , \\
&\qquad\qquad \cdots \quad \cdots \\
&(n+1)(n+1+b-\epsilon a)f_{n+1} + [\lambda_n + 2ac - b - 2\epsilon(bc+c+d) \\
&\qquad -n(n+1+2b+4\epsilon c)]f_n + 4\epsilon(nc+bc+d)f_{n-1} = 0 .
\end{aligned} \tag{2.2.23}$$

重新定义系数

$$\begin{aligned}
A_n &= \lambda_n + 2ac - b - 2\epsilon(bc+c+d) - n(n+1+2b+4\epsilon c) , \\
B_n &= (n+1)(n+1+b-\epsilon a) , \\
C_n &= 4\epsilon[(n+b)c+d]
\end{aligned}$$

后, 首项和第n项递推关系可写为

$$\begin{aligned}
B_0 f_1 + A_0 f_0 = 0 , \\
B_n f_{n+1} + A_n f_n + C_n f_{n-1} = 0 . \quad (n>1)
\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

三项递推关系(2.2.24)可以用连分数法[137, 160–162] 或矩阵法[161, 162]处理, 因为我们可以将A_n, B_n和C_n排列成一个广义Jacobi三角(准对角)的带状矩阵. 方程(2.2.21)也可以用Jacobi 多项式作展开, 得到类似的三项递推关系, 但是那里的系数A_n, B_n和C_n 将比这里的要复杂得多.

同一奇点处的另一个正则的幂级数解易由Frobenius方法得到, 这里不作讨论. 非正则解可以通过类似于方程(2.2.19)和(2.2.20)的积分与这些正则解联系起来.

为了使$W_n(z)$在$z=\pm1$处有限, 幂级数$W_n(z)$必须截断为多项式, 且a、b、c和d可为整数或半整数. 在一般情形下, 自旋权重的广义椭球波方程的解为超越函数[137, 160–162], 即合流Heun函数[167]. 关于本征值λ_n和权重因子$(1-z)^{b+a}(1+z)^{b-a}$, $W_n(z) = W_n(a,b,c,d;z)$是正交的, 可构成一组正交完备函数集. 因此我们有

$$\int_{-1}^{+1} (1-z)^{b+a}(1+z)^{b-a} W_m(z) W_n(z) dz = \delta_{m,n} . \tag{2.2.25}$$

在无穷远处, 解$W_n(z)$有渐近形式$W_n(z) \to e^{\mp\gamma z}$, $(z \to \pm\infty,\ \gamma > 0)$. 这与Minkowski时空是Kerr-Newman黑洞的渐近时空是一致的. 因此, 入射波和出射波在无穷远处可以取平面波形式.

C. 径向方程的特殊解($\varepsilon \neq 0$)

这里我们基于讨论的方程(2.2.15)即为

$$(1-z^2)R''(z) - 2zR'(z) + \Big[\gamma^2(z^2-1) + 2\delta z - \frac{(\beta+\alpha z)^2}{z^2-1} \\ +(2\omega^2-\mu_0^2)(2M^2-Q^2) - 2eQM\omega - \lambda\Big]R(z) = 0\,, \quad (|z|<1) \qquad (2.2.26)$$

其中

$$\gamma^2 = \varepsilon^2(\omega^2-\mu_0^2)\,, \quad \delta = \varepsilon(A\omega - M\mu_0^2), \quad \alpha = A = 2M\omega - eQ\,,$$

$$\varepsilon\beta = \varepsilon B = \omega(2M^2-Q^2) - eQM - ma,.$$

情形I: 当$\gamma = \delta = 0$时, 有三种情况:

(1) $\omega = \pm\mu_0 = eQ/M \neq 0$, $(\alpha \neq 0)$; (2) $\omega = \mu_0 = eQ/M = 0$, $(\alpha = 0)$[这个情形可看作前一个的特例]; (3) $\omega = \mu_0 = 0$, $eQM \neq 0$, $(\alpha \neq 0)$.

情形(1)和(3)中的解为Jacobi超球函数$R(z) = P_n^{(\beta+\alpha,\beta-\alpha)}(z)$, 而情形(2)的解退化为Legendre函数$R(z) = P_n^{\beta}(z)$或$Q_n^{\beta}(z)$.

情形II: 当$M\mu_0^2 = 0$, $\omega \neq 0$且$\delta/(\varepsilon\omega) = \alpha$时, 这一情形已为Leaver [160]详细地考察过.

情形III: 当$\alpha = \delta = 0$且$\gamma \neq 0$时, 方程(2.2.26)为常椭球波方程[185], 其解为扁椭球角向波函数$R(z) = S_n^{\beta,0}(\gamma, z)$.

显然, 所有这些解均为一般解$R_n^{(\beta+\alpha,\beta-\alpha)}(\gamma,\delta;z) = (1-z)^{(\beta+\alpha)/2}(1+z)^{(\beta-\alpha)/2}$ $W_n(\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)$ 的特殊情形.

情形I中的解在物理上对黑洞蒸发特别重要, 因为散射截面、定态能级以及黑洞辐射的发射系数等等, 可以在理论上通过Jacobi多项式作解析计算得到. 而且在这个情形, 可能存在特殊的对称性.

§2.2.4 极端情形($M^2 = a^2 + Q^2$)下径向方程的解

在极端KNBH情形($\varepsilon = 0$)下, 我们作代换$r = M(1+x)$, 则事件视界位于一个单奇点($r_h = M$)即$x = 0$. 因此径向方程(2.2.7)可以变换为下述合流方程:

$$x^2R''(x) + 2xR'(x) + \Big[(\omega^2 - \mu_0^2)M^2x^2 + 2(A\omega - M\mu_0^2)Mx \\ +(A + \frac{\mathcal{B}}{x})^2 + (2\omega^2 - \mu_0^2)(2M^2 - Q^2) - 2eQM\omega - \lambda\Big]R(x) = 0\,, \qquad (2.2.27)$$

其中$A = 2M\omega - eQ$, $M\mathcal{B} = B\varepsilon = \omega(2M^2 - Q^2) - eQM - ma$.

定义$C^2 = M^2(\omega^2 - \mu_0^2)$, $D = M(A\omega - M\mu_0^2)$, $\lambda_e = (2\omega^2 - \mu_0^2)(2M^2 - Q^2) - 2eQM\omega - \lambda + A^2 - 1/4$, 并作代换$x = e^{i\nu\xi}$, $R(x) = R(\xi) = e^{-i\nu\xi/2}H(\xi)$后, 方程(2.2.27)变换为广义Whittaker-Hill方程(GWHE):

$$H''(\xi) - \nu^2\Big[C^2e^{2i\nu\xi} + 2De^{i\nu\xi} + 2A\mathcal{B}e^{-i\nu\xi} + \mathcal{B}^2e^{-2i\nu\xi} + \lambda_e\Big]H(\xi) = 0\,. \qquad (2.2.28)$$

GWHE的解可形式上写为

$$H(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n e^{in\nu\xi}\,, \qquad n = 0\,, \pm1\,, \pm2\,, \cdots\,. \qquad (2.2.29)$$

把(2.2.29)代入方程(2.2.28)后将得到系数之间的五项递推关系. 解$R(\xi)$可以是周期为$4\pi/\xi$的函数. 按周期的奇偶性, 有四套周期解存在. 方程(2.2.27)有二个合流非正则奇点$x = 0, \infty$, 它可化为双合流Heun方程[167]. 根据ν为正数或负数, 其解在视界$r_h = 0$ ($x = 0$)处的行为依赖于$R(\xi)$在$\xi \to \pm i\infty$处的行为.

§2.2.5 非极端情形与极端情形下径向方程之间的关系

在这一小节中我们将证明极端情形下的径向方程(2.2.27)是非极端情形下径向方程(2.2.13)的合流形式.

在方程(2.2.13)中作代换$\varepsilon = M\epsilon$, $\epsilon z = x$, $\varepsilon z = Mx$, $\mathcal{B} = \epsilon B$, $(0 < \epsilon < 1)$ 后, 我们有

$$r = M + \varepsilon z = M(1 + x)\,, \quad \Delta = \varepsilon^2(z^2 - 1) = M^2(x^2 - \epsilon^2)\,,$$

$$A = 2M\omega - eQ\,, \quad \epsilon B = M\mathcal{B} = \omega(2M^2 - Q^2) - eQM - ma\,.$$

在非极端情形下的方程(2.2.13)等价于下述形式

$$\partial_x[(x^2-\epsilon^2)\partial_x R(x)] + \Big[M^2(\omega^2-\mu_0^2)(x^2-\epsilon^2) + 2M(A\omega - M\mu_0^2)x + \frac{(Ax+B)^2}{x^2-\epsilon^2} + (2\omega^2-\mu_0^2)(2M^2-Q^2) - 2eQM\omega - \lambda\Big]R(x) = 0\,. \quad (2.2.30)$$

方程(2.2.30)有二个正则奇点$x=\pm\epsilon$, $(z=\pm1)$, 分别位于内外视界$r_\pm = M \pm \epsilon = M(1\pm\epsilon)$上, 另一个非正则奇点位于$x=\infty$处. 在取极限$\epsilon \to 0$, $x^2-\epsilon^2 \to x^2$后, 非极端情形下的方程(2.2.30)趋于极端情形时的方程(2.2.27). 后者有两个合流非正则奇点$x = 0, \infty$. 当ϵ或$\varepsilon \to 0$时, 极端情形下位于视界$r_h = M$的非正则奇点$x=0$正是由非极端情形的两个正则奇点$x=\epsilon$和$x=-\epsilon$合流到$x=0$的结果.

§2.2.6 小结

前面的工作主要是将无源带电的有质量的Klein-Gordon标量场方程分离变量为角向和径向部分, 两者都是自旋权重的广义椭球波方程. 在非极端情形, 我们给出了一般解的幂级数展开式和积分形式, 也给出了径向方程在物理上有趣的几个特殊解. 这些解可正交归一化为一套完备函数组. 此外它们在无穷远处的渐近行为与平面波一致. 基于这些正交函数或正交多项式, 我们可以按复标量场的波函数去展开Kerr-Newman黑洞背景上的Klein-Gordon 量子场. 在极端情形, 径向方程可化为修正的Whittaker-Hill方程. 在这两种情形下, 我们可作幂级数展开以获得系数之间的递推关系式.

基于这一节的工作, 在第四章中将讨论了Hawking过程中的量子守恒律和黑洞热力学定律的可能推广[108, 193]. 我们预期Kerr-Newman几何中的Dirac方程的分离变量部分可能也可以化为广义椭球波方程的形式, 后来严格证明它们可以化为Bocher方程, 与相关的工作以后再着手进行.

§2.3 Kerr-Sen几何中有质量复标量场方程的精确解

本节证明了Kerr-Sen几何中有质量复标量场方程分离变量后的径向部分满足广义椭球波方程, 事实上后者就是合流Heun方程. Kerr-Sen解[16] 是低能有效弦场论中的一个从Kerr解生成的转动带电的黑洞解. 文献[194] 利用检测粒子的Hamilton-Jacobi方程讨论了这个扭曲的Kerr黑洞的热力学性质. 本节的目的是要寻找有质量带电的标量波方程的一些精确解. 首先我们将Kerr-Sen黑洞背景上

的有质量带电标量场方程分离变量成为径向部分和角向部分[164], 然后将径向部分变换成广义椭球波方程, 并将其与合流Heun 方程[167]联系起来.

§2.3.1 Kerr-Sen黑洞背景上Klein-Gordon 方程的分离变量

Kerr-Sen解是从电中性转动(Kerr)黑洞解通过扭曲(twist)程序构造而来的, 它是低能有效异质(杂化)弦论的一个精确的四维黑洞解. 采用Boyer-Lindquist坐标系, Kerr-Sen度规在Einstein基中可改写为

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\Delta}{\Sigma}\big(dt - a\sin^2\theta d\varphi\big)^2 - \Sigma\big(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2\big) \\ &\quad - \frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\big[adt - (\Sigma + a^2\sin^2\theta)d\varphi\big]^2, \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

其中$\Delta = r^2 + 2(b-M)r + a^2 = (r-r_+)(r-r_-)$, $\Sigma = r^2 + 2br + a^2\cos^2\theta$, $r_\pm = M - b \pm \epsilon$, 而$\epsilon = \sqrt{(M-b)^2 - a^2}$. 电磁矢势的1-形式精确地选为[194]

$$\mathbf{A} = \frac{Qr}{\Sigma}\big(dt - a\sin^2\theta d\varphi\big)\,. \tag{2.3.2}$$

这个度规描述一个质量为M, 电荷为Q, 角动量为$J = Ma$和磁偶极矩为$\mu_0 = Qa$的黑洞. 扭曲参数b通过关系式$b = Q^2/(2M) = M\tanh^2(\alpha/2)$ 与Sen引入的参数α相联系. 因为$M \geq b \geq 0$, $r = r_-$是一个位于区域$r \leq 0$内的新的奇点. Kerr-Sen黑洞的事件视界位于$r = r_+$处. 扭曲Kerr解的约化外视界面积为$\mathcal{A}_+ = r_+^2 + 2br_+ + a^2 = 2Mr_+$.

我们现在考虑Kerr-Sen黑洞背景上有质量带电的检测标量场方程的解. 质量为μ_0、电荷为e的复标量场Φ在这样的时空中满足下述Klein-Gordon(KG)方程

$$\begin{aligned} &\frac{-1}{\Delta}\big[(r^2 + 2br + a^2)\partial_t + a\partial_\varphi + ieQr\big]^2\Phi + \partial_r(\Delta\partial_r\Phi) \\ &\quad + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta\Phi) + \big(a\sin\theta\partial_t + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi\big)^2\Phi = \mu_0^2\Sigma\Phi\,. \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

KG方程的波函数的解具有可分离变量形式$\Phi(t, r, \theta, \varphi) = R(r)S(\theta)e^{i(m\varphi - \omega t)}$, 其分离变量后的径向部分和角向部分如下

$$\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta[\sin\theta\partial_\theta S(\theta)] + \big[\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta} + (\mu_0^2 - \omega^2)a^2\sin^2\theta\big]S(\theta) = 0\,, \tag{2.3.4}$$

$$\partial_r[\Delta\partial_r R(r)] + \big[\frac{K^2(r)}{\Delta} - \mu_0^2(r^2 + 2br + a^2) - \lambda + 2ma\omega\big]R(r) = 0\,, \tag{2.3.5}$$

式中λ为一分离变量常数, $K(r) = \omega(r^2 + 2br + a^2) - eQr - ma$.

角向方程(2.3.4)的一般解$S^{\ell}_{m,0}(ka,\theta)$为自旋权重$s=0$的常椭球角向波函数[185], 而径向方程(2.3.5)可化为

$$\partial_r[\Delta\partial_r R(r)] + \big[\frac{(Ar-ma)^2}{\Delta} + k^2\Delta + 2Dr - \lambda\big]R(r) = 0\,, \tag{2.3.6}$$

其中已令$A = 2M\omega - eQ$, $D = A\omega - M\mu_0^2$, $k = \sqrt{\omega^2-\mu_0^2}$ (不妨假定$\omega > \mu_0$). 为后面的讨论方便起见, 我们也记$\epsilon B = A(M-b) - ma$, 且引入$W_{\pm} = (A\pm B)/2$.

方程(2.3.6)有两个正则奇点$r = r_{\pm}$, 其指标分别为$\pm iW_+$和$\pm iW_-$. 在内外视界处, 径向波函数$R(r)$具有渐近行为

$$R(r) \sim \left\{ \begin{array}{ll} (r-r_+)^{\pm iW_+}\,, & (r\to r_+) \\ (r-r_-)^{\pm iW_-}\,, & (r\to r_-) \end{array} \right. . \tag{2.3.7}$$

作代换$R(r) = (r-r_+)^{i(A+B)/2}(r-r_-)^{i(A-B)/2}F(r)$, 可把$R(r)$满足的方程(2.3.6)变成一个$F(r)$满足的虚的自旋权重为$iA$、推动权重为$iB$的修正的广义椭球波方程[163].

$$\begin{aligned} \Delta\partial_r^2F(r) + 2[i\epsilon B + (1+iA)(r-M+b)]\partial_r F(r) \\ +[k^2\Delta + 2Dr + iA - \lambda]F(r) = 0\,. \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

方程(2.3.8)在两个奇点$r = r_{\pm}$的指标分别为$\rho_+ = 0,\ -2iW_+$和$\rho_- = 0,\ -2iW_-$. 因此, 在每一点有两个线性独立的解. 无穷远处是方程(2.3.6)或(2.3.8)的一个非正则奇点. 函数$R(r)$和$F(r)$在无穷远处具有渐近形式$e^{\pm ikr}$. 方程(2.3.8)的形式与Kerr-Newman几何中有质量复标量波方程的径向方程相似[163], (当$\mu_0 = 0$时)其解称为广义椭球波函数[160]. 有趣的是, 当$\omega = \pm\mu_0 = eQ/M$(即$k = D = 0$)时, 函数$F(r)$ 的一个特解满足虚指标的Jacobi方程.

§2.3.2 广义椭球波函数与Heun方程

在这一小节中, 我们将证明虚数阶的广义椭球波方程(2.3.8)事实上是Heun方程的一个合流形式[167]. 为此, 作坐标变换$r = M-b+\epsilon z$ 并把$R(r) = (z-1)^{i(A+B)/2}(z+1)^{i(A-B)/2}F(z)$代入方程(2.3.6), 则我们可以化它为下列广义椭球波方程的标准形式[163, 167]:

$$\begin{aligned} (z^2-1)R''(z) + 2zR'(z) + \big[(\epsilon k)^2(z^2-1) + 2D\epsilon z \\ + \frac{(Az+B)^2}{z^2-1} + 2D(M-b) - \lambda\big]R(z) = 0 \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

和

$$(z^2-1)F''(z)+2[iB+(1+iA)z]F'(z)+[(\epsilon k)^2(z^2-1)$$
$$+2D\epsilon z+2D(M-b)+iA-\lambda]F(z)=0\,, \qquad (2.3.10)$$

其中一撇表示对其变量的导数.

在反射$k\to -k$下, 自旋权重的椭球波函数$F(z)$是对称的. 不失一般性, 我们令$F(z)=e^{i\epsilon kz}G(z)$, 把方程(2.3.10)变为

$$(z^2-1)G''(z)+2[iB+(1+iA)z+i\epsilon k(z^2-1)]G'(z)+[2i\epsilon k(1+iA$$
$$-iD/k)z-2\epsilon kB+iA+2D(M-b)-\lambda]G(z)=0\,. \qquad (2.3.11)$$

通过变量代换$z=1-2x$, 将奇点$r=r_+(z=1)$和$r=r_-(z=-1)$分别安排为$x=0$和$x=1$, 则可以化方程(2.3.11)为Heun 方程的一个合流形式[154, 167]

$$G''(x)+\big(\beta+\frac{\gamma}{x}+\frac{\delta}{x-1}\big)G'(x)+\frac{\alpha\beta x-h}{x(x-1)}G(x)=0\,, \qquad (2.3.12)$$

式中$\gamma=1+2iW_+$, $\delta=1+2iW_-$, $\beta=4i\epsilon k$, $\alpha=-(1+iA)+iD/k$, $h=\lambda-2i\epsilon k-iA+4\epsilon kW_+-2Dr_+$.

合流Heun方程(2.3.12)的辅助参数为h, 该方程两个正则奇点$x=0,1$的指标分别为$(0,1-\gamma)$和$(0,1-\delta)$. 在无穷远处, 它还有一个非正则奇点. 在奇点$x=0$的邻域, 方程(2.3.12) 的幂级数解可写为

$$G(\alpha,\beta,\gamma,\delta,h;x)=\sum_{n=0}^{\infty}g_nx^n\,, \qquad (2.3.13)$$

其系数g_n满足三项递推关系[154, 167]

$$\begin{aligned}&g_0=1\,,\qquad g_1=-h/\gamma\,,\\&(n+1)(n+\gamma)g_{n+1}-\beta(n-1+\alpha)g_{n-1}\\&\quad=\big[n(n-1-\beta+\gamma+\delta)-h\big]g_n\,.\end{aligned} \qquad (2.3.14)$$

不难导出$x=0$处指标为$1-\gamma$的解. 通过交换正则奇点$x=0$和$x=1$: $x\to 1-x$的线性变换可得到奇点$x=1$邻域的幂级数解. 在文献[113, 167]中, 合流Heun方程的解按超几何函数和合流超几何函数作了展开. 合流Heun函数可以归一化并构成一组正交完备函数集[167]. 需注意的是, 当参数取一些特殊值时合流Heun方程也可以容许有准多项式解[154, 167]. 从三项递推关系可以推知, 如果

$$\alpha = -N\,, \quad 整数\ N \geq 0\,, \qquad g_{N+1}(h) = 0\,, \tag{2.3.15}$$

则$G(\alpha,\beta,\gamma,\delta,h;x)$是一个多项式解. 上式中$g_{N+1}$为$h$的$N+1$次多项式, 换而言之, h的$N+1$个本征值h_i 满足方程:

$$g_{N+1}(h_i) \equiv 0\,.$$

§2.3.3 小结

这一节证明了对Kerr-Newman黑洞背景上标量波方程的分离变量处理[163]完全可以应用于扭曲的Kerr解. 分离变量后的径向部分可化为广义椭球波方程, 后者事实上是Heun方程的合流形式. 基于本节的工作, 在第四章中用Damour-Ruffini-Sannan方法考察Kerr-Sen 黑洞背景上标量粒子的Hawking辐射[164], 表明在量子热效应方面, Kerr-Sen黑洞与Kerr-Newman黑洞有完全相似的特征.

第三章 黑洞蒸发— 概论

"It is often said that nothing can escape from a black hole. But in 1974, Stephen Hawking realized that, owing to quantum effect, black holes should emit particles with a thermal distribution of energies — as if the black hole had a temperature inversely proportional to its mass".
Nature, **looking**back...

1974年Hawking [57, 180, 195]做出了划时划的发现, 他考察了一颗塌缩星正在形成黑洞时的量子效应, 表明黑洞象一个黑体一样具有以温度$T = \kappa/(2\pi)$标志的热辐射或蒸发. 这一重要理论的发现不仅解决了黑洞热力学中存在的矛盾, 而且深入地揭露了量子力学、热力学与广义相对论之间的内在联系. 以后人们进一步发现, 不仅正在塌缩中的黑洞, 而且永久黑洞以及任何一个具有未来视界的静态或稳态时空都具有完全相同的Hawking效应.

§3.1 Hawking辐射发现的历史背景

二十世纪七十年代初提出的黑洞"无毛"定理指出形成黑洞的物质会失去绝大部分信息, 洞外无穷远处的观测者只能知道黑洞的质量、电荷和角动量这三根"毛发". 另一方面, 黑洞物理学的经典观点认为没有任何物质包括光(辐射)能够逃离黑洞, 黑洞是黑的, 是一个"单向膜", 只许物质流进而不许出来. 黑洞吸收所有种类的辐射而不反射, 这一点与黑体类似. "不反射辐射"和"信息丧失" 这两点暗示了黑洞可能而且应该具有热性质, 具有熵和温度.

1971年Hawking证明了面积定理. 1972年Bekenstein [83]和Smarr [84]给出了黑洞质量公式的积分关系式和微分关系式. 利用Einstein方程, 可以证明稳态黑洞的表面引力是常数. Penrose的宇宙监督假设禁止极端黑洞(表面引力为零)的形成, 即不能通过有限次操作将黑洞的表面引力降低到零.

Bekenstein-Smarr质量公式非常类似于转动物体的热力学第一定律表达式.

面积定理表明视界面积类似于热力学熵，如果把黑洞的表面引力视为温度，则黑洞正好可以视为一个热力学系统. 1973年Bardeen-Carter-Hawking [77](BCH) 严格证明了黑洞动力学四个定律. 最初人们认为把黑洞的这些力学性质看成热力学定律只是形式上的类似，没有实际意义. BCH当年谨慎地把黑洞的四条性质称为力学定律，而不是热力学定律. 他们告诫说，黑洞的“温度”不能认为是真实的，因为黑洞不发射任何物质，而有温度的物体应该发射热辐射.

在热力学中，一个系统的状态一般可以用两个基本参量：温度和熵来表征，其它宏观量都作为温度和熵的函数而变化. 类似地，黑洞动力学状态也由两个参量表征，一个是黑洞的面积；另一个是表面引力. 由于稳态黑洞只依赖于质量、电荷和角动量这三个参量，黑洞的表面引力也就可以表示为这三个参量的函数. Hawking的面积定理揭示了黑洞面积与热力学系统的熵之间的密切联系. 经典观点认为黑洞是一座禁止一切物质和辐射(即一切信息)逃逸的监狱；另一方面，黑洞外部观测者除知道质量、电荷和角动量外，对黑洞内部性质一无所知. 这就是说黑洞吞噬了一切信息，那么它必定具有熵，而熵是系统无序的量度，量度一个系统的信息的丢失. 熵也量度对应着一个给定状态的所有可能内部微观态的总数.

1972年Bekenstein [83]进一步加强了黑洞面积和熵的相似性，肯定了黑洞具有熵. 对这个熵值的计算结果表明它确实与黑洞表面积成正比. 黑洞的面积对应于不可约质量，面积定理要求在黑洞动力学过程中不可约质量是不可减少的. 这一点与熵增加原理是一致的. Bekenstein进一步说明了视界面积A确实是热力学意义下的熵，即黑洞熵S可以表达为：[2]

$$\boxed{S = \frac{A}{4},} \tag{3.1.1}$$

对应地，黑洞的温度T与表面引力κ成正比

$$\boxed{T = \frac{\kappa}{2\pi}.} \tag{3.1.2}$$

这就引出了一个尖锐的问题，因为任何温度为T的热力学体系必定伴随着相应于温度T的黑体辐射，但是经典黑洞的基本性质是不可能有任何物质或辐射从视界之内出来. 因此这是广义相对论与统计热力学之间的一个尖锐矛盾.

Hawking对Bekenstein的大胆观点持反对意见，他甚至认为Bekenstein滥用了他的面积定理. 除Bekenstein的导师Wheeler外，几乎所有知名黑洞物理学家都站

[2]注：这里的黑洞熵指Bekenstein-Hawking熵(几何熵). 需区分清楚几种不同的黑洞熵概念：几何熵、热力学熵以及交缠熵(entanglement entropy)等等.

在Hawking一边，但是勇敢的Bekenstein仍然不服. 为了证明Bekenstein的观点是错误的，于是Hawking做了具体计算，得到的结果完全出乎他的意料. 最初他以为是自己算错了，经反复检查后，他不得不接受这个结果，并且在*Nature*（自然）杂志上发表了他的惊人预言[57]，这无疑是一个爆炸性的事件.

于是在1974年里在黑洞专家中间流传着这样一句话"有一个名叫Hawking的年轻人发现了黑洞蒸发". Hawking的计算表明，黑洞的蒸发辐射具有黑体的所有特征，这结果使黑洞热力学完全自洽，解决了广义相对论与热力学之间的矛盾.

Hawking证明了如果考虑量子效应，黑洞确实存在由温度所标志的辐射. Hawking 的计算虽是对Schwarzschild黑洞进行的，对于一般的Kerr-Newman黑洞，结论也同样成立.

那么Hawking的发现的惊人之处又在哪里？初看起来黑洞向外蒸发粒子是令人困惑的，这种行为是与黑洞禁止任何物质逃离视界这一"经典"概念完全对立的. 从Christodoulou [55]对黑洞质能的划分可以知道，在原则上可以通过动力学方法从带电或转动的黑洞提取能量，使黑洞的电荷和角动量减少到零，使带电或转动的激发态黑洞退化为基态的Schwarzschild黑洞. 再向基态黑洞提取能量已不可能，因此Schwarzschild 黑洞又被称为死亡的黑洞. 在黑洞演化过程中，不可约质量不可减少，上述提取转动能和电磁能量的过程并不违反面积定理. 另一方面，Zel'dovich [41, 42]，Starobinsky [43]，Unruh [45]等证明，在带电或转动黑洞的视界附近一定会有粒子的自发产生，而且粒子产生的效应将使黑洞退激发为基态的黑洞. 但是这种粒子的发射(非热辐射)仍然发生在视界之外. 对于基态的Schwarzschild黑洞，人们预期没有粒子产生，不可能完全蒸发(Schwarzschild黑洞没有非热辐射是理论早已证明了的). 一个"退激发"的Schwarzschild黑洞必须保持其与面积和熵相联系的不可约质量能量. 按照经典热力学第二定律，面积和熵只能随时间增长；而Hawking的计算表明不论是激发态的还是基态的黑洞都向外发射粒子，即黑洞必定会蒸发掉其质量和能量. 显然Hawking蒸发违反面积定理，与"经典"的黑洞热力学第二定律是相矛盾，而解决这个矛盾的方案来自Bekenstein的推广了的热力学第二定律[85, 196]. 因此，Hawking关于黑洞量子蒸发的发现消除了热力学中的不一致，证明最初关于黑洞的热力学图像是完全不正确的，而这个图像的"经典"式描述，严格说来是不自洽的[197].

按照热力学定律，所有具有一定温度并沉浸在一种较冷介质中的物体，必定会发出辐射而损失能量. 在交换能量过程中，物体的熵减少而周围介质的熵增加，但整个系统的总熵必定增加. 假设把黑洞放在一个浴池里，如果黑洞温度(表面引

力) 比浴池的低, 它将吸收能量并增加自己的熵(面积); 但是如果黑洞温度高, 我们就不得不承认黑洞应当把能量和熵交给浴池, 而这与“经典”的黑洞热力学第二定律(面积定理)是矛盾的.

Hawking辐射的发现正好消除了这个不一致. 由于量子力学效应, 黑洞即使处于基态也能发射粒子或辐射. 由于丧失能量, 黑洞熵(面积)减少, 而周围环境的熵增加, 黑洞加环境构成的整个系统的总熵仍然增大, 因而推广的热力学第二定律仍然能被遵守[85, 196].

§3.2 Hawking辐射产生的物理机制

Hawking过程是一种半经典的量子效应. 可以用几种不同的方式来描绘黑洞的蒸发, 它们相应于以不同的方法建立黑洞弯曲时空的量子场论, 然而几乎所有的方法都认为真空涨落是向外辐射的最终源泉[7]. Hawking辐射可以用粒子概念加以解释, 也可以用波动的思想来描述; 既可以用量子力学观点加以说明, 又可以在量子场论的框架中得到阐释.

首先, Hawking辐射可以用量子力学中的隧道效应来加以解释.

从黑洞内部来看, 视界起着无限高势垒的作用. 但是量子力学提供了穿过任何一种势垒的可能性, 即使是没有足够的能量. 这种现象称为隧道效应, 是测不准原理的直接推论. 经典地讲, 粒子从黑洞逃离是被禁戒的, 但是测不准原理允许粒子在一定时间间隔里从黑洞“借贷”一定量的能量, 这是因为在一个很短的时间间隔里能量会有一定的涨落. 如果黑洞的尺度与基本粒子的de Broglie波长相比拟, 能量的“跃迁”可能足以使粒子运动一段大于视界半径的距离, 其结果就是粒子通过量子隧道效应逃出黑洞, 而黑洞损失能量.

其次, 黑洞蒸发还可以由量子场论中的真空极化来作出一种等价的解释.

在量子力学里, 真空是一种能量最低的状态. 由于质量与能量的等价性, 时间和能量的测不准关系允许真空不空. 真空中的能量涨落可以导致粒子产生, 即在真空中不断产生正反虚粒子对. 不过这个虚过程十分短暂, 产生的正反粒子对又很快湮灭, 恢复为真空态. 所以虚粒子对产生和湮灭的过程是极为短暂的.

真空中不停地、大量地发生着真空涨落, 由于能量涨落而躁动的量子真空—“Dirac 海”中遍布着自发出现而又很快湮灭的正反粒子对. 如果加上外场的作用,

那么真空就会被极化. 量子电动力学中预言的粒子由于真空极化而自发地产生是已由实验证实的现象. 在黑洞之外邻近视界处的量子真空也会被黑洞强大的引力场所极化.

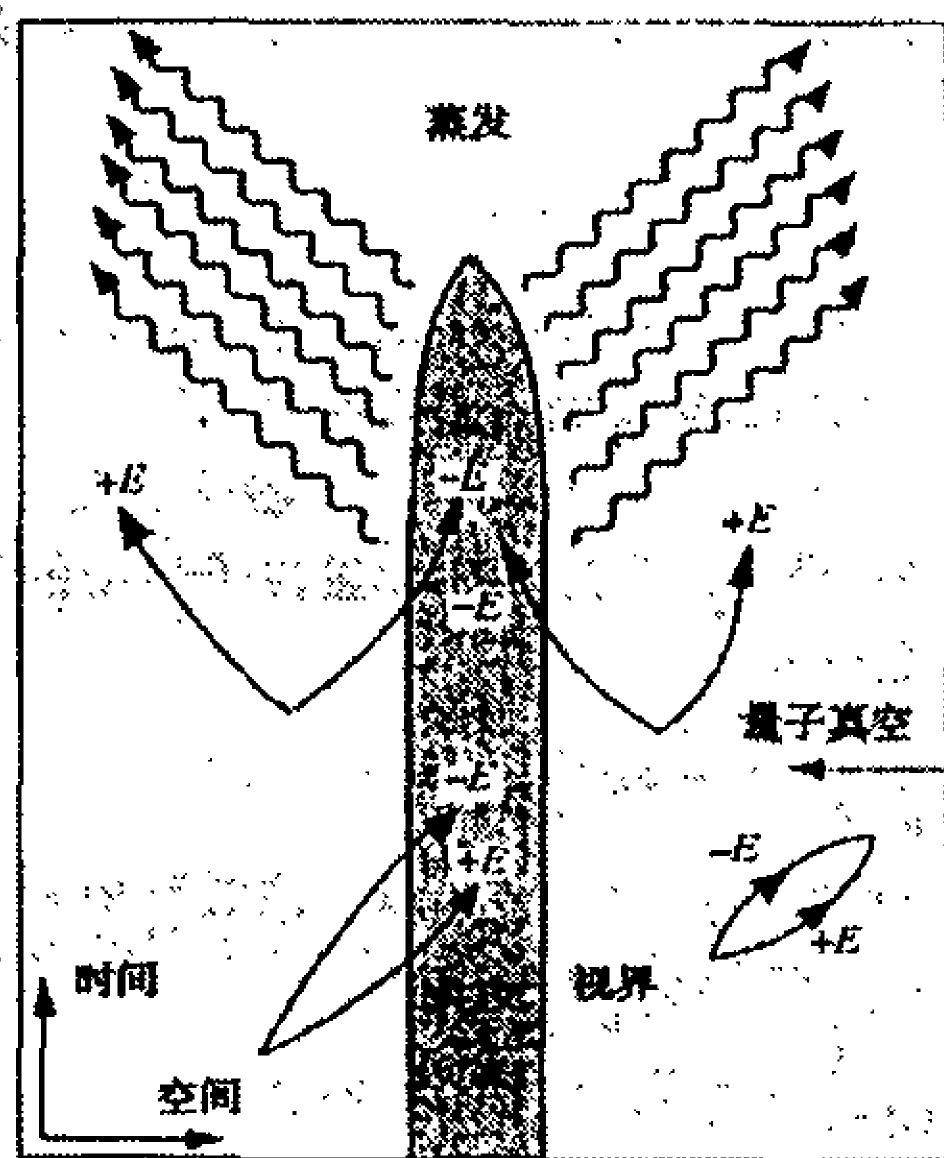


图3 黑洞视界附近的真空涨落导致Hawking辐射

现在我们用真空涨落来解释Schwarzschild黑洞的热辐射. 考虑黑洞外部邻近视界处的真空涨落, 由于真空被引力场极化, 虚粒子对中的一个落入黑洞, 另一个飞向远处. 正是这种虚粒子对实化的过程导致了黑洞热辐射的产生.

黑洞内部的单向膜区允许负能实粒子存在, 而在黑洞外部的通常真空中不允许负能实粒子存在. 虚粒子对中的负能粒子落进黑洞后, 将顺着时间方向穿过单向膜区到达奇点, 使那里的质量减少, 而留在视界外的正能粒子实化后飞向远方. 在黑洞外部无穷远处的观测者看来, 黑洞在发出粒子流, 即黑洞在蒸发, 向他辐射了粒子.

这种过程也可以等价地理解为: 一个正能粒子逆着时间方向从奇点穿过单向膜区到达黑洞表面, 在那里被散射, 然后再顺时飞向远处. 这就是黑洞热辐射粒子的机制. 这种粒子发射机制并不依赖于粒子的种类, 因此黑洞会产生所有类型的辐射(粒子和波).

Hawking用量子场论方法严格证明了这种辐射的能谱是黑体辐射谱, 其温度

为$T = \kappa/(2\pi)$. 黑洞的蒸发辐射具有黑体的所有特征, 它赋予了黑洞一个真实的由表面引力来给定的温度, 这个结果使得黑洞热力学完全自洽. Hawking的计算是针对Schwarzschild黑洞进行, 但对于其它类型的黑洞, Hawking的结论也仍然成立. 在1974年至1975年间, 人们用几个完全不同的方法导出了Hawking效应, 支持了Hawking的论断[7].

Hawking过程提供了从黑洞提取能量的另一种机制. 黑洞的转动能和电磁能可以由经典的和量子的两种过程来提取. 带电和转动黑洞由于超辐射过程而退激化为基态黑洞. 在基态黑洞情形, 则由于真空极化, Schwarzschild黑洞的不可约质量会自动地蒸发掉.

由于黑洞蒸发是一种量子现象, 只对微黑洞才特别有意义, 有可能在早期宇宙的演化中发挥一定的作用. 越小的黑洞, 其温度就越高. Hawking预期黑洞蒸发的最后阶段有三种可能结局, 其中的一种可能是表现为剧烈的γ射线爆发[57].

黑洞蒸发的最后结局尚不得而知. 随着黑洞的不断蒸发, 质量不断减少而温度越来越高, 黑洞本身也越来越表现得象一个"基本粒子". 当黑洞半经减少到Planck长度(10^{-33}厘米)时, 时空几何自身的涨落变得越来越重要, 而广义相对论和量子力学在Planck尺度已完全失效, 只有量子引力理论才能揭示微黑洞的最后命运. 但是就目前的理论而言, 还没有建立一个完全的量子引力理论, 现有的量子引力(广义相对论量子化)理论已经被证明是不可重整化的. 所以人们近年来寄希望于弦论去解决黑洞辐射的端点和奇性问题. 超弦理论有可能揭示大爆炸(宇宙的开始和终结)和黑洞命运(Hawking辐射的终点)的秘密.

§3.3 导出Hawking辐射的不同方法

自Hawking发现了黑洞蒸发以后, 关于黑洞热辐射的理论研究, 已发表了大量的文章. 由于文献众多, 不可能列举所有已知的推导Hawking辐射的各种不同方法. 在本节中我们将简要介绍几种比较有代表性的方案, 包括Hawking的原创性工作.

- 引力缩法: Hawking [57]在证明处于塌缩之中的Schwarzschild黑洞会发射热辐射的过程中, 用到了Bogoliubov变换, 解析延拓和几何光学近似. 对标量场入射波和出射波的正负频解分别构造了一组正交完备基, 相应地定义了两个不等价的真空态, 再由Bogoliubov变换求出正负频混合系数. 在计算混频系数时通过下

半复ω-平面作了解析延拓.

两套不等价真空出现了正负频混模是产生粒子的关键. 引力场可看作平直时空背景上通过绝热过程施加的外场, 根据等效原理, 黑洞引力场的作用与一个(作加速运动的)非惯性系等效. 按照这个观点, 引力场中粒子产生与Unruh [60] 导出的Unruh-Rindler效应等价.

- 温度(热)Green函数法: Gibbons和Perry [198]通过作Kruskal变换把Schwarzschild时空变为Kruskal 时空, 采用虚时间$\tau = it$将时空欧氏化, 从而Kruskal坐标T和R都是虚时间τ的周期为$2\pi/\kappa = 8\pi M$的周期函数. Kruskal时空中的(零温)Feynman 传播子欧氏化后也成为τ的周期函数, 而虚时周期性是温度Green函数具有的特征. 于是Kruskal时空中的零温传播子变成了Schwarzschild时空中温度为$T = \kappa/(2\pi) = (8\pi M)^{-1}$的温度Green函数了. 这表明Schwarzschild黑洞与外界存在温度为T 的热平衡, 即黑洞有温度为T的热辐射. 时空的虚时周期性是导致Hawking效应的几何根源.

与上述Hawking的方法不同, 热Green函数方法不假定黑洞塌缩, 但要假定黑洞与外界处于热平衡. 这个方法可进一步发展为生成泛函法[199].

- 路径积分方法: Hartle和Hawking [181]考虑复化后的Schwarzschild时空, 在复t-平面对Feynman传播子作解析延拓, 要求时间t的虚部具有$2\pi/\kappa = 8\pi M$的周期. 这相当于要求将时空点(t, r, θ, φ)与$(t + 2i\pi/\kappa, r, \theta, \varphi)$等同. 对于Kerr-Newman时空, 则将点$(t, r, \theta, \varphi)$ 与$(t + 2i\pi/\kappa, r, \theta, \varphi + 2i\Omega/\kappa)$等同. 他们首次引入了Hartle-Hawking真空态的概念.

- 欧氏作用量积分法: Gibbons和Hawking [200]通过选择合适的参考流形计算复化(欧氏化)后时空的引力作用量和配分函数. 这个方法用途很广, 并不仅限于黑洞事件视界型时空, 对de-Sitter时空也可应用[200].

- 二次量子化方法: Boulware [201]研究了Schwarzschild时空中标量场和Dirac场的二次量子化, 定义了Boulware真空态. Unruh [45]对Kerr时空中无质量标量场和中微子场作了相应的处理. Unruh [45], Ford [202], 以及Iyer和Kumar [203]等用这个方案讨论了Kerr黑洞中的Hawking辐射.

- 重整化能动张量法[132]: 这个方法计算能量张量的平均值, 然后作重整化(减除方案), 但要选定某种特定的真空态作具体计算. 从视界外穿过视界进入黑洞的负能流, 等于无穷远处Hawking辐射流的负值, 它与Hawking辐射引起的黑洞

质量损失平衡. 这个方法被认为是证明Hawking辐射的最严格方法, 但计算过于复杂, 应用于球对称黑洞(包括动态情形)较为理想, 可用于考查反作用效应.

- 等效原理法: 从第一原理的角度探讨黑洞辐射的本质, 实际上是应用引力与加速参照系等效的观点. 弯曲时空量子场论[81, 132]已经一般性地证明了, 在平直空间里作加速运动的探测器将探测到"真空粒子", 等效于在弯曲空间中作惯性(测地)运动的探测器将探测到热粒子流. Unruh [60]的研究建立了Hawking效应与Rindler-Unruh 效应的等价性. Unruh的结果表明真空和粒子的概念是相对的, 依赖于观测者. 另外, Unruh也引入了一种真空的概念, 称为Unruh真空.

在平直时空中一个匀加速观测者不可能"经典"地获得来自一个遥远时空区域的信息, 因为那个区域发出的辐射不能到达, 对他而言那部分时空区域隐藏在一个视界之后. 如果考虑真空中的量子涨落, 就可以得出加速(等效于一个均匀引力场)会使真空极化的结论, 那么该观测者携带的粒子探测器将测到一种黑体辐射形式的"量子噪声", 黑体温度正比于其加速度. 从加速的观点来看, 视界就像高温的膜[7], 而视界的热膜发射的粒子就是Hawking蒸发的粒子.

Punsly [204]利用等效原理分析了Schwarzschild黑洞和Kerr黑洞的Hawking 蒸发, 比较了自由落体的惯性观测者的结论和静止于视界上方(实际上在加速)的观测者的结论. Punsly的文章是针对不太熟悉黑洞辐射的理论粒子物理学家、天体物理学家和相对论专家而写的. 更通俗的解释见Thorne的科普书[7].

- DRS法: Damour和Ruffini [182]采用的方法是对空间(径向)坐标作解析延拓. 这个方法要求存在一个未来视界, 解析延拓要求能量ω为实的、正定的[205]. 经过Sannan [206]的改进和赵峥[51]在动态黑洞中的推广, 这个方法成为研究一般黑洞辐射(Hawking辐射和非热辐射)非常有效的工具. 本文在他们工作的基础上进一步发展和完善这个方法, 使之成为一个比较完整的理论体系, 我们的主要工作是对动态黑洞进行的, 详见后面章节中的讨论.

这个方案的物理意义是, 定义在连通复时空流形上的纯态波函数在被视界分割开的实时空中呈现为混合态波函数, 并表现出热性质, 原因是视界阻断了信息的交流.

- 赵峥方法[51]: DRS方法得到黑洞热辐射的黑体谱的关键在于, 粒子动力学方程一定能在视界附近利用乌龟坐标化成标准形式的波动方程:

$$[\frac{\partial^2}{\partial {r_*}^2} + (\omega - \omega_H)^2]\Psi(r_*) = 0 \,. \tag{3.3.1}$$

粒子波方程之所以能化成上式的原因在于,所用的乌龟坐标变换能使时空在视界附近显式共形于二维Minkowski时空:

$$ds^2 = dt^2 - dr_*^2. \tag{3.3.2}$$

反之,假定在乌龟坐标变换下,在任何视界附近二维时空都显式共形于Minkowski 时空,则粒子动力学场方程都一定能化成波动方程的标准形式.由此,不仅可以得到黑洞的出射谱,还能确定黑洞视界的位置和温度.这个方法不仅可以用于稳态时空[207],还可以推广到一般的动态时空中的黑洞[208, 209].例如在Kerr-Newman黑洞中引入乌龟坐标变换

$$r_* = r + \frac{1}{2\kappa}\ln\frac{r - r_H}{r_H}\,, \tag{3.3.3}$$

其中r_H为视界位置,κ为视界表面引力,它们均为待定常数.

要求Klein-Gordon方程或Dirac方程在作乌龟坐标变换后在视界$r = r_H$附近化成方程(3.3.1)的标准形式.由要求$\frac{\partial^2}{\partial {r_*}^2}$项的系数(0/0-型不定式)在$r \to r_H$时趋于1,可得到视界面方程:$\Delta_H = r_H^2 - 2Mr_H + a^2 + Q^2 = 0$,即$r_H = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}$和表面引力$\kappa_H = (r_H - M)/(r_H^2 + a^2)$,而场方程在分离变量$\Psi = R(r_*)\Theta(\theta)e^{i(m\varphi - \omega t)}$后化成标准形式:

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial {r_*}^2} + (\omega - m\Omega_H - e\Phi_H)^2\Big]R(r_*) = 0\,, \tag{3.3.4}$$

式中$\Omega_H = a/(r_H^2 + a^2)$, $\Phi_H = Qr_H/(r_H^2 + a^2)$分别为视界的转动角速度和两极处的电势.再采用DRS方法中的解析延拓技术就可以证明Kerr-Newman 黑洞有热谱

$$\langle \mathcal{N}_\omega \rangle = \frac{1}{e^{(\omega - m\Omega_H - e\Phi_H)/T} \pm 1}\,, \tag{3.3.5}$$

温度为$T = \kappa_H/(2\pi)$的热辐射.

可见从要求Klein-Gordon方程或Dirac方程在视界附近化成波动方程的标准形式出发,可以自动定出黑洞的视界位置和温度,并导出热辐射谱.不难验证,当采用上述变换以及r_H和κ_H的值时,二维时空在视界附近确实显式共形于Minkowski时空(3.3.2).

- 共形平直法[51]: 把上述方法只应用于时空的度规而不是用于粒子动力学方程,也可以得出视界位置和Hawking温度,但得不到热谱.这两个方法奏效的根本原因是时空在乌龟坐标变换下的共形不变性,而且黑洞的Hawking温度也具有共形不变性[210].换而言之,共形因子不影响表面引力和Hawking效应.这个方

法可以看作是由前一个方法派生出来的, 即从要求乌龟坐标变换下的二维时空线元显式共形于二维Minkowski时空出发, 求出视界位置和温度. 这两种方法均可推广到一般动态黑洞时空[208, 209].

- 其它方法: 其它如密度矩阵法[2], 以及Bogoliubov变换法[2, 211]可以与二次量子化方法(Unruh方案)结合使用等等. 新近的研究如复路径方法[212], Parikh-Wilczek法[213]以及文献[214, 215]在形式上稍有不同地强调了模的解析性和作用量在视界上有虚的贡献项. Rosu [216]则在散射图象里讨论了黑洞热效应. Hawking效应与高频截止无关见文献[217–219].

§3.4 Hawking辐射的本质特征

现有的文献提供了众多的推导Hawking辐射的方法, 它们强调了Hawking过程的不同特征, 有些则作了显著不同的物理假设. 根据已有的研究结果, 黑洞的Hawking 辐射是一个半径典的量子效应, 其背后的基本物理是[220]:

Hawking辐射是运动学的.

即Hawking蒸发是纯运动学效应, 仅依赖于存在一个Lorentz度规加上某种非退化的视界; Hawking辐射与Einstein方程的有效性无关.

Hawking-Unruh效应不是动力学效应, 不依赖于Einstein方程, 与时空度规的具体形式无关. 它实际上是一种“边界”效应, 决定于坐标系的选择或者作为时空“边界”的视界的存在. Hawking效应可以视为引力场的量子热效应, Unruh效应可以看作为惯性的量子热效应. 表面引力实际上就是加速度, 惯性力与引力都能使涨落的真空极化, 导致粒子的自发产生. 因此Hawking效应与Unruh效应是同一现象的两个方面, 是等效原理的不同体现.

不用量子理论, Hawking过程的数学可以经典地描述为从黑洞散射出并在晚期到达无穷远处的一个指数增长的波模的Fourier变换. 用这样的经典语言完全能解释黑洞辐射, 表明Hawking辐射与存在事件视界之间有密切联系. 因此, Hawking蒸发的经典实质为它在数学是完全经典的[221].

§3.5 Hawking辐射的可能实验检验

自Hawking效应发现以后，经过28年的研究，在理论上人们不再怀疑它的正确性了，但是实验上至今尚未对这个理论给予验证. 正如Hawking自己曾讲过的，如果这个理论得到了实验验证，那么他肯定会获得Nobel物理学奖.

Hawking最初提出黑洞蒸发时，预言了黑洞蒸发有三种可能结局. 其中的一种可能是黑洞在剧烈的γ射线爆发中消亡. 有人试图用这种可能来解释天体物理学上观测到的γ射线爆，但是解释γ爆发也有许多其它的可能机制. 因此这种观点有很大的不确定性，而对γ爆的解释目前也没有定论.

基于天体物理学上的大质量黑洞的Hawking温度甚低，而早期宇宙形成的环境在地球上又不具备模拟的条件，因此有人认为Hawking效应也许永远也不能被观测到[222].

尽管如此，最近Dimopoulos和Landsberg [223]提出在加速器(LHC)的Tev能标上产生了微型黑洞的可能性. 他们认为微黑洞衰变为硬光子和带电轻子是低背景下的一个干净信号，在一个Tev能标上，LHC每秒可产生一个微黑洞. 由此可检验高维Hawking辐射理论，新的高维数和量子引力的能标.

根据广义相对论(引力)的类似模型[224-226]，现在已具备了在凝聚态物质的类似系统中利用当前的和计划中的技术在实验室里用实验来检验Hawking效应的可能性. 人们据此提出了一些实验检验Hawking效应的方案. 但所有的根据类似引力模型建议的对Hawking辐射的实验检验都仅仅只是探测黑洞物理的运动学方面[220].

Sakagami和Ohashi [227]建议了一个实验模型，利用Laval管嘴模拟黑洞时空，在声学视界附近有Hawking辐射的声学类似波，而这个出射波功率谱呈Planck分布. 他们提出可以通过模拟Hawking辐射并观测这个谱分布来间接验证Hawking的理论.

Barcelo, Liberat和Visser [228]进一步改进了上述模型，采用两个"串联"的Laval管嘴，在其中产生准一维的Bose-Einstein凝聚的超声速流. 通过这样的设计，他们期望Hawking辐射能够在上述装置中发生. 根据现有的实验技术水平，用这种方法来检验Hawking辐射理论是很有前途的. 因此我们可以乐观地认为在不久的将来用实验间接来探测Hawking效应已有现实的可能性了.

第四章 稳态黑洞的Hawking辐射 — DRS方法

"Note that this approach only requires the existence of a future horizon and is totally independent of any dynamical details of the process leading to the formation of this horizon."
T. Damour & R. Ruffini, 1976

本章比较详细地介绍Damour-Ruffini-Sannan(DRS)方法[182, 206], 因为本文的主旨就是要进一步发展这一方法, 用于探讨动态黑洞的Hawking辐射.

§4.1 Damour-Ruffini-Sannan方法

1976年Damour和Ruffini [182]采用复r-坐标解析延拓法证明了Hawking辐射. 他们的方法不用二次量子化, 仅用弯曲时空背景上的相对论量子力学就可以证明黑洞存在热辐射. 这个方法要求黑洞具有一个未来视界. 后来Martellini和Treves [205]进一步论证了这个方法, 表明波函数解析延拓的假设应作为一个独立的要求, 因为解析延拓的存在依赖于能量ω是实的、正定的, 而在弯曲时空中这个条件不能从一般原理中推导出来.

DRS方法在证明中不要求黑洞与外界存在热平衡, 也没有明显考虑黑洞的坍缩形成. 所以这种方法可用于一切事件视界. 1988年Sannan [206]对这一方法作了进一步改进, 使之不仅可以适用于Bose子情形, 而且可以适用于Fermi场情形.

由于Damour-Ruffini-Sannan(DRS)法是对黑洞表面各点的辐射逐点进行研究, 因此它原则上可用于探讨表面各点温度不同的黑洞, 例如动态黑洞的Hawking辐射[51]. 下面以Schwarzschild黑洞为例来介绍DRS方法.

§4.1.1 Klein-Gordon方程

采用号差(+, −, −, −)后, Schwarzschild时空的线元为[229]:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2}dt^2 - \frac{r^2}{\Delta}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\,, \tag{4.1.1}$$

其中$\Delta = r^2 - 2Mr$, 事件视界位于$r_H = 2M$.

在弯曲时空中, 描述自旋为零、质量为μ_0的标量粒子的动力学方程为Klein-Gordon方程: $(\Box + \mu_0^2)\Phi = 0$. 在Schwarzschild时空(4.1.1)中, 该方程可明显写为

$$\Big[\partial_r\Delta\partial_r - \frac{r^4}{\Delta}\partial_t^2 + \partial_\theta^2 + \cot\theta\partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 - \mu_0^2 r^2\Big]\Phi = 0\,. \tag{4.1.2}$$

由于时空(4.1.1)的球对称性, 波函数可分离变量为

$$\Phi = R(r)Y_{\ell m}(\theta)e^{i(m\varphi - \omega t)}\,, \tag{4.1.3}$$

式中ω, ℓ, m分别为粒子的能量、角动量量子数和磁量子数, $Y_{\ell m}(\theta)$为缔合Legendre函数. 把(4.1.3)式代入方程(4.1.2)可得径向方程

$$\Big[\Delta\partial_r^2 + 2(r - M)\partial_r + \frac{\omega^2 r^4}{\Delta} - \ell(\ell+1) - \mu_0^2 r^2\Big]R(r) = 0\,. \tag{4.1.4}$$

Schwarzschild黑洞视界位于$r_H = 2M$, 而黑洞热辐射的粒子沿径向运动, 所以我们只对径向方程在$r_H = 2M$处的渐近行为感兴趣. 可以引入乌龟(tortoise)坐标变换

$$r_* = r + 2M\ln\frac{r - 2M}{2M}\,, \quad 或 \quad dr_* = \frac{r^2}{\Delta}dr\,. \tag{4.1.5}$$

此变换的特点是把视界推到坐标无穷远处,

$$当 r \to r_H = 2M 时, \quad r_* \to -\infty\,; \qquad 当 r \to +\infty 时, \quad r_* \to -\infty\,.$$

在乌龟坐标变换下, 方程(4.1.4)在视界表面附近化成波动方程

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial {r_*}^2} + \omega^2\Big]R(r_*) = 0\,. \tag{4.1.6}$$

容易看出径向方程在无穷远处($r \to +\infty$)也能化成普通的波动方程, 只不过是其中多了一个负的平方质量项($-\mu_0^2$)而已. 方程(4.1.6) 的一般解为

$$R(r_*) \sim e^{\pm i\omega r_*}\,. \tag{4.1.7}$$

博士学位论文
DOCTORAL DISSERTATION

在黑洞视界外部，则存在一个有效势，相当于黑洞视界附近的一个势垒，它对进出黑洞的粒子流产生散射，会有反射和透射．这在外部无穷远处的观测者看来，黑洞不是完全的黑体，而是一个既吸收又反射的"灰体"．不过这个势垒与黑洞的基本属性无关，黑洞实质上还是一个黑体．

§4.1.2 Dirac方程

在弯曲时空中，描述自旋为1/2、质量为μ_0的旋量粒子的动力学方程由Dirac方程描述．在Newman-Penrose(NP)表述[230–242]中，其旋量形式[2, 5, 20, 51, 243]为

$$\begin{aligned}
&(D+\epsilon-\rho)F_1+(\bar{\delta}+\tilde{\pi}-\alpha)F_2=i\mu_0G_1/\sqrt{2}\,,\\
&(\underline{\Delta}+\mu-\gamma)F_2+(\delta+\beta-\tau)F_1=i\mu_0G_2/\sqrt{2}\,,\\
&(D+\epsilon^*-\rho^*)G_2-(\delta+\tilde{\pi}^*-\alpha^*)G_1=i\mu_0F_2/\sqrt{2}\,,\\
&(\underline{\Delta}+\mu^*-\gamma^*)G_1-(\bar{\delta}+\beta^*-\tau^*)G_2=i\mu_0F_1/\sqrt{2}\,.
\end{aligned}\tag{4.1.8}$$

为了在Schwarzschild时空中写出Dirac方程的明显形式，我们选取下述零标架使其满足伪正交条件: $\mathbf{l}\cdot\mathbf{n}=-\mathbf{m}\cdot\overline{\mathbf{m}}=1$,

$$\begin{aligned}
&D=\frac{r^2}{\Delta}\partial_t+\partial_r\,, &&\delta=\frac{1}{\sqrt{2}r}\big(\partial_\theta+\frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi\big)\,,\\
&\underline{\Delta}=\frac{1}{2}\big(\partial_t-\frac{\Delta}{r^2}\partial_r\big)\,, &&\bar{\delta}=\frac{1}{\sqrt{2}r}\big(\partial_\theta-\frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi\big)\,.
\end{aligned}\tag{4.1.9}$$

不为零的NP旋系数为[5]

$$\rho=-\frac{1}{r}\,,\ \mu=-\frac{r-2M}{2r^2}\,,\ \gamma=\frac{M}{2r^2}\,,\ \beta=-\alpha=\frac{\cot\theta}{2\sqrt{2}r}\,.\tag{4.1.10}$$

将所需的旋系数代入方程(4.1.8)，并作如下分离变量代换

$$\begin{aligned}
&F_1=\frac{R_1(r)}{\sqrt{2}r}S_1(\theta)e^{i(m\varphi-\omega t)}\,, &&F_2=\frac{R_2(r)}{\sqrt{\Delta}}S_2(\theta)e^{i(m\varphi-\omega t)}\,,\\
&G_1=\frac{R_2(r)}{\sqrt{\Delta}}S_1(\theta)e^{i(m\varphi-\omega t)}\,, &&G_2=\frac{R_1(r)}{\sqrt{2}r}S_2(\theta)e^{i(m\varphi-\omega t)}
\end{aligned}\tag{4.1.11}$$

后得到径向方程

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\Delta}\big(\partial_r-\frac{i\omega r^2}{\Delta}\big)R_1=(-\lambda+i\mu_0r)R_2\,,\\
&\sqrt{\Delta}\big(\partial_r+\frac{i\omega r^2}{\Delta}\big)R_2=-(\lambda+i\mu_0r)R_1
\end{aligned}\tag{4.1.12}$$

和角向部分

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\dagger}_{1/2}S_1 &\equiv \big(\partial_\theta + \frac{1}{2}\cot\theta - \frac{m}{\sin\theta}\big)S_1 = -\lambda S_2\,,\\
\mathcal{L}_{1/2}S_2 &\equiv \big(\partial_\theta + \frac{1}{2}\cot\theta + \frac{m}{\sin\theta}\big)S_2 = \lambda S_1\,,
\end{aligned}\tag{4.1.13}$$

式中$\lambda = \ell + 1/2$为分离变量常数. 角向函数$S_1 \sim {}_{-1/2}Y_{\ell m}(\theta)$和$S_2 \sim {}_{1/2}Y_{\ell m}(\theta)$ 为自旋权重等于$p = \pm 1/2$的旋量球函数${}_pY_{\ell m}(\theta)$, 满足下述方程[143, 186–192]

$$\big[\partial_\theta^2 + \cot\theta\partial_\theta + \big(\frac{m}{\sin\theta} + p\cot\theta\big)^2 - p^2 + \ell(\ell+1)\big]{}_pY_{\ell m}(\theta) = 0\,.\tag{4.1.14}$$

由一阶径向方程(4.1.12)可导出相应的二阶方程:

$$\begin{aligned}
&\big[\Delta\partial_r^2 + (r-M)\partial_r + \frac{\omega^2 r^4}{\Delta} - i\omega r^2\frac{r-3M}{\Delta}\\
&\qquad -(\mu_0^2 r^2 + \lambda^2)\big]R_1 = i\mu_0\sqrt{\Delta}R_2\,,\\
&\big[\Delta\partial_r^2 + (r-M)\partial_r + \frac{\omega^2 r^4}{\Delta} + i\omega r^2\frac{r-3M}{\Delta}\\
&\qquad -(\mu_0^2 r^2 + \lambda^2)\big]R_2 = -i\mu_0\sqrt{\Delta}R_1\,.
\end{aligned}\tag{4.1.15}$$

从一阶方程(4.1.12)和二阶方程(4.1.15)中可以看出, 径向函数$R_1(r)$和$R_2(r)$互为复共轭, 我们取

$$R_1 = (P_1 + iP_2)/\sqrt{2}\,, \qquad R_2 = (P_1 - iP_2)/\sqrt{2}$$

后将一阶方程和二阶方程分别化为实形式

$$\begin{aligned}
(\Delta\partial_r + \lambda\sqrt{\Delta})P_1 &= (\mu_0 r\sqrt{\Delta} - \omega r^2)P_2\,,\\
(\Delta\partial_r - \lambda\sqrt{\Delta})P_2 &= (\mu_0 r\sqrt{\Delta} + \omega r^2)P_1\,,
\end{aligned}\tag{4.1.16}$$

$$\begin{aligned}
&\big[\Delta\partial_r^2 + (r-M)\partial_r + \frac{\omega^2 r^4}{\Delta} - (\mu_0^2 r^2 + \lambda^2)\big]P_1\\
&\qquad = \big(\mu_0\sqrt{\Delta} - \omega r^2\frac{r-3M}{\Delta}\big)P_2\,,\\
&\big[\Delta\partial_r^2 + (r-M)\partial_r + \frac{\omega^2 r^4}{\Delta} - (\mu_0^2 r^2 + \lambda^2)\big]P_2\\
&\qquad = \big(\mu_0\sqrt{\Delta} + \omega r^2\frac{r-3M}{\Delta}\big)P_1\,.
\end{aligned}\tag{4.1.17}$$

在前一小节中引入的乌龟坐标变换下, 方程(4.1.16)和(4.1.17)在视界$r_H = 2M$附近分别化为

$$\frac{\partial}{\partial r_*}P_1 = -\omega P_2\,, \qquad \frac{\partial}{\partial r_*}P_2 = \omega P_1\,, \tag{4.1.18}$$

$$(\frac{\partial^2}{\partial {r_*}^2} + \omega^2 - \frac{1}{4M}\frac{\partial}{\partial r_*})P_1 = \frac{\omega}{4M}P_2\,,$$
$$(\frac{\partial^2}{\partial {r_*}^2} + \omega^2 - \frac{1}{4M}\frac{\partial}{\partial r_*})P_2 = -\frac{\omega}{4M}P_1\,. \tag{4.1.19}$$

利用(4.1.18)式可将方程(4.1.19)进一步化为标准形式的波方程

$$(\frac{\partial^2}{\partial {r_*}^2} + \omega^2)P(r_*) = 0\,, \qquad (P = P_1,\ P_2)\,. \tag{4.1.20}$$

我们看到, 在无穷远处的观测者看来, 旋量粒子在视界附近的运动与静质量为零的粒子相同. 方程(4.1.20)的一般解为

$$P(r_*) \sim e^{\pm i\omega r_*}\,. \tag{4.1.21}$$

§4.1.3 解析延拓

忽略角向部分和与自旋有关的矩阵因子后, 由标量场径向解(4.1.7) 和旋量场径向解(4.1.21)可构造入射波解

$$\Psi^{\rm in} = e^{-i\omega(t+r_*)} = e^{-i\omega v} = e^{-i\omega u - 2i\omega r_*} \tag{4.1.22}$$

和出射波解

$$\Psi^{\rm out} = e^{-i\omega(t-r_*)} = e^{-i\omega u} = e^{-i\omega v + 2i\omega r_*}\,, \quad (r > 2M)\,. \tag{4.1.23}$$

在上式中采用了超前EF坐标$v = t + r_*$和推迟EF坐标$u = t - r_*$. 研究Hawking辐射, 只对出射波感兴趣, 须在超前EF坐标系中讨论问题. 在v-坐标系中, 度规(4.1.1) 可改写为

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2}dv^2 - 2dvdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\,. \tag{4.1.24}$$

这个坐标系只能很好地描写入射波, 描写出射波则不理想. 入射波在视界上解析, 而出射波非解析. 把乌龟坐标代入(4.1.23)式可得

$$\Psi^{\rm out} = e^{-i\omega v + 2i\omega r}(\frac{r-2M}{2M})^{4iM\omega}\,, \quad (r > 2M)\,. \tag{4.1.25}$$

因此$\Psi^{\rm out}(r>2M)$在视界$r_H=2M$上奇异, 它只能描述视界外的出射粒子, 不能描写视界内的出射粒子.

Damour-Ruffini建议在下半复r-平面把$\Psi^{\rm out}(r>2M)$ 解析延拓到视界内, 即以视界$r=2M$为园心, 以$|r-2M|$为半径, 沿下半园周转动$(-\pi)$角, 这时

$$(r-2M)\longrightarrow(2M-r)e^{-i\pi}$$

出射波延拓到视界内为

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi^{\rm out}} &= e^{-i\omega v+2i\omega r}\Big(\frac{2M-r}{2M}\Big)^{4iM\omega}e^{4\pi M\omega}\\ &= e^{-i\omega v+2i\omega r_*}e^{4\pi M\omega}=\Psi^{\rm out}(2M-r)e^{4\pi M\omega},\quad (r<2M).\end{aligned}\tag{4.1.26}$$

在视界外的出射波为

$$\Psi^{\rm out}(r-2M)=e^{-i\omega v+2i\omega r_*},\quad (r>2M).\tag{4.1.27}$$

在上式中, 乌龟坐标在视界内的定义是

$$r_*=r+2M\ln\frac{2M-r}{2M}.\tag{4.1.28}$$

因此, 包括视界内和视界外的乌龟坐标的总定义是

$$r_*=r+2M\ln\left|\frac{r-2M}{2M}\right|.\tag{4.1.29}$$

(4.1.26)式描述黑洞内部的出射波, 代表一个入射负能反粒子, 它等价于一个逆时前进的出射正能粒子. (4.1.27)式则描述黑洞外部的出射波, 代表一个顺时前进的正能粒子. 整个出射波要用(4.1.26)和(4.1.27) 两式来统一描述, 但在视界面$r_H=2M$上仍有奇异性. 利用单位阶跃函数$\vartheta(x)$, 可把这两式表示的出射波统一表述为

$$\psi_\omega=C_\omega\big[\vartheta(r-2M)\Psi^{\rm out}(r-2M)+\vartheta(2M-r)\Psi^{\rm out}(2M-r)e^{4\pi M\omega}\big],\tag{4.1.30}$$

式中$\Psi^{\rm out}(2M-r)=e^{-i\omega v+2i\omega r_*}=e^{-4\pi M\omega}\widetilde{\Psi^{\rm out}}$, C_ω为归一化常数, C_ω^2为视界外部其附近的出射正能粒子流的强度, $C_\omega^2/(2\pi)$为流密度.

将波函数ψ_ω归一化后可得到[51]

$$\pm1=(\psi_\omega,\psi_\omega)=C_\omega^2(1\pm e^{8\pi M\omega}),\tag{4.1.31}$$

即

$$\langle \mathcal{N}_\omega \rangle = \mathcal{C}_\omega^2 = \frac{1}{e^{8\pi M\omega} \pm 1} = \frac{1}{e^{\omega/T} \pm 1}, \qquad T = \frac{1}{8\pi M} = \frac{\kappa}{2\pi}, \tag{4.1.32}$$

其中正号对应于Fermi子, 负号对应于Bose子, $\kappa = 1/(4M)$为黑洞表面引力, $T = 1/(8\pi M)$为黑洞温度. 因此黑洞有粒子射出, 其能谱为黑体谱, 黑洞确实具有量子温度$T = \kappa/(2\pi)$.

上述证明对Klein-Gordon粒子和Dirac粒子成立, 对所有其它种类的粒子也成立, 而且一旦存在热平衡, 各种自旋粒子的能谱都应表现为同样温度的黑体谱.

§4.1.4 Sannan的推广

从视界内、外出射波函数的表达式来看, 出射波似乎在视界处发生了一次散射, 不难得出射波的相对振幅

$$\left| \frac{\Psi^{\rm out}}{\widetilde{\Psi^{\rm out}}} \right| = e^{-4\pi M\omega} \tag{4.1.33}$$

和穿过视界的相对散射几率

$$P_\omega = e^{-8\pi M\omega}. \tag{4.1.34}$$

对于各种自旋粒子的出射波都有上述相对散射几率.

如果假定黑洞与辐射(温度为T的外界环境)达到热平衡状态, 把相对散射几率P_ω理解为粒子处于能级为ω的量子态上的占有几率, 那么按照量子统计理论, 容易得出能量为ω的一个单粒子态中的平均粒子数

$$\langle \mathcal{N}_\omega \rangle = \frac{1}{e^{\omega/T} \pm 1} \equiv \frac{1}{e^{8\pi M\omega} \pm 1}, \qquad T = \frac{1}{8\pi M}. \tag{4.1.35}$$

由(4.1.26)和(4.1.27)两式描述的出射波在视界处的散射过程, 实际上是在视界附近的真空涨落产生正反粒子对. Sannan [206]用量子场论和量子统计的思想改进了Damour-Ruffini的工作. 他采用Feynman的观点, 认为相对散射几率也就是从视界外邻近视界处的真空态中产生一个正反粒子对的相对几率. 从初始真空态可跃迁到几率为C_ω的没有粒子对的真空态, 几率为$C_\omega P_\omega$的产生一个粒子对的态, $\cdots$, 几率为$C_\omega P_\omega^n$的同时产生n个粒子对的态. 跃迁到这些终态的总几率应为1, 即

$$\sum_n C_\omega P_\omega^n = 1, \qquad \begin{cases} n = 0, 1 & \text{(Fermi子)} \\ n = 0, 1, \cdots & \text{(Bose子)} \end{cases}. \tag{4.1.36}$$

由于Fermi子遵守Pauli不相容原理, 每个量子态最多产生一个粒子对, 因此n只能取0和1, 由此可求得$C_\omega = 1/(1+P_\omega)$. 在能量为$\omega$的模式中产生一个粒子对的绝对几率为$P_{1\omega} = C_\omega P_\omega = P_\omega/(1+P_\omega)$, 于是在黑洞外部邻近视界处的真空涨落产生一个能量为ω的粒子对的几率为

$$P_{1\omega} = \frac{1}{e^{8\pi M\omega}+1}. \tag{4.1.37}$$

由于黑洞出射波的相对散射几率, 也就是在洞外真空涨落产生一个粒子对的相对几率, (4.1.37)式既表示在洞外真空涨落产生一个能量为ω的正能粒子(反粒子)的几率, 同时也表示射向远处的能量为ω的平均粒子数(射到无穷远处的每个模式中含有一个粒子的几率)

$$\langle \mathcal{N}_\omega \rangle = \frac{1}{e^{8\pi M\omega}+1}. \tag{4.1.38}$$

如果把$T = 1/(8\pi M) = \kappa/(2\pi)$看作温度, 则上式为Fermi子的黑体谱.

对于Bose子, 由于不受Pauli不相容原理的限制, 一个量子态中可能存在多个粒子对, 因此$n = 0, 1, 2, \cdots, \infty$. 不难求出$C_\omega = 1 - P_\omega$. 在一个量子态中产生$n$个粒子对的绝对几率为$P_{n\omega} = C_\omega P_\omega^n = (1-P_\omega)P_\omega^n$, 它表示射到无穷远的每个模式含有$n$个粒子的几率, 也表示$n$个粒子出现在无穷远的几率. 于是黑洞发射能量为$\omega$的粒子模式中的平均粒子数为

$$\langle \mathcal{N}_\omega \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} nP_\omega^n = \frac{P_\omega}{1-P_\omega} = \frac{1}{e^{8\pi M\omega}-1}. \tag{4.1.39}$$

(4.1.39)式为Bose子的热辐射谱.

如果考虑到黑洞外部对粒子而言存在一个势垒的影响, 视界附近产生的粒子在逃离黑洞的途中要穿过这个势垒, 其中一部分将被散射, 那么发射到无穷远处能量为ω的粒子的平均粒子数应乘以一个势垒贯穿系数$\Gamma_{\omega\ell m}$. 考虑角量子数ℓ和磁量子数m的存在, 并包含进势垒贯穿因子后, 黑洞辐射的平均粒子数为

$$\langle \mathcal{N}_{\omega\ell m} \rangle = \frac{\Gamma_{\omega\ell m}}{e^{8\pi M\omega} \pm 1}. \tag{4.1.40}$$

其中正号对应于Fermi子, 负号对应于Bose子.

(4.1.40)式对质量$\mu_0 \neq 0$的粒子成立. 对于$\omega < \mu_0$情况, 由于粒子不可能射到无穷远, 此时应理解为$\Gamma_{\omega\ell m} = 0$.

§4.1.5 对DRS方法的再讨论

Damour-Ruffini-Sannan(DRS)证明黑洞存在热辐射的方法, 与其它的建议明显不同. 首先, DRS方法只用了弯曲时空中的相对论量子力学, 没有进行二次量子化. 其次, 它没有假定黑洞塌缩或黑洞与外界处于热平衡. 再次, 它不是对时间或频率作解析延拓, 而是对空间径向坐标作解析延拓.

DRS方法的解析延拓是通过下半复r-平面进行的. 事实上, 延拓也可通过上半复r-平面进行, 此时需转动$(+\pi)$角. 然而对波函数作归一化时, 不论是对Bose 子还是对Fermi子, 都应为正1 [51]. Unruh [60, 132]的方案在过去视界上引入了边界条件来代替塌缩, 相当于从上半复r-平面解析延拓波函数.

DRS方法可推广到各种稳态视界, 而且可用于存在反作用的情况. 赵峥等[51]运用DRS方法证明了任何稳态时空, 只要存在事件视界, 就一定会有Hawking辐射. Sannan探讨过此法与量子场论的关系. 赵峥等对DRS方法的量子场论基础也作过探讨, 给出了一些物理解释, 指出"未来事件视界的内部存在物质源" 这一前提相当于Hawking方案中的黑洞"塌缩". 他们以Kerr黑洞中Klein-Gordon粒子的Hawking 辐射为例, 从DRS法的解析延拓引出Unruh的二次量子化方法[45], 证明了用Unruh的二次量子化模函数作解析延拓能同样地导出黑洞的热辐射. 这个工作论证了DRS法与Unruh 法的等价性, 建立了DRS方法与二次量子化的关系, 从而把它建立在弯曲时空量子场论[132]的牢固基础之上. 详细的论证请见文献[51], 在此不作赘述.

§4.2 稳态(Kerr-Newman)黑洞的Hawking效应

自Damour-Ruffini和Sannan的工作出现后, 人们运用DRS法探讨了各种稳态时空的热辐射, 例如Kerr黑洞[244-246], Kerr-Newman黑洞[108, 182, 193, 247-250], Kerr-Newman-Kasuya时空[251-253], Kerr-Newman-de Sitter时空[254-257], NUT-Kerr-de Sitter 时空[258], NUT-Kerr-Newman-de Sitter时空[259, 260]等等. 文献[182, 247, 251, 252, 254, 255]研究标量粒子$(s=0)$的Hawking辐射, 研究旋量粒子$(s=1/2)$的Hawking蒸发见文献[244, 247-249, 253, 256-260]. 最近荆继良考察了Kerr-Newman黑洞中光子的Hawking 效应. 许殿彦等[245, 246]考察了Kerr黑洞中任意自旋粒子的量子热效应, 沈有根[261]将这一工作推广到Kerr-de Sitter时空.

Damour-Ruffini证明Kerr-Newman黑洞的热辐射与静态黑洞基本相似, 具有如下的谱形式

$$\langle \mathcal{N}_\omega \rangle = \frac{1}{e^{(\omega - m\Omega_+ - e\Phi_+)/T} \pm 1}, \qquad T = \frac{\kappa_+}{2\pi}, \tag{4.2.1}$$

式中$\Omega_+ = a/(r_+^2 + a^2)$, $\Phi_+ = Qr_+/(r_+^2 + a^2)$分别为黑洞外视界的转动角速度和两极处的电势, $\kappa_+ = (r_+ - M)/(r_+^2 + a^2)$为外视界表面引力, $r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}$, ω、m和e分别为粒子的能量、磁量子数和电荷, M、Q和$a = J/M$为黑洞的质量、电荷和比角动量.

在本节中我们用DRS方法研究Kerr-Newman黑洞中标量粒子和Dirac粒子的热辐射.

§4.2.1 Klein-Gordon场方程

在Kerr-Newman黑洞时空中, 度规线元

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\Sigma}\big(dt - a\sin^2\theta d\varphi\big)^2 - \frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\big[adt - (r^2 + a^2)d\varphi\big]^2 - \Sigma\big(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2\big) \tag{4.2.2}$$

和电磁势1-形式

$$\mathbf{A} = \frac{Qr}{\Sigma}(dt - a\sin^2\theta d\varphi) \tag{4.2.3}$$

满足Einstein-Maxwell方程. 其中$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$, $\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2 + a^2 = (r - r_+)(r - r_-)$, $r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}$.

将Kerr-Newman时空的逆变度规和电磁势四矢(4.2.3)代入弯曲时空中质量为μ_0带电荷e的粒子遵守的具有最小电磁耦合相互作用的Klein-Gordon场方程: $(\Box_c + \mu_0^2)\Phi = 0$, 并作分离变量

$$\Phi = R(r)S(\theta)e^{i(m\varphi - \omega t)} \tag{4.2.4}$$

后可得到径向部分

$$\big[\partial_r\Delta\partial_r + \frac{K^2}{\Delta} - (\mu_0^2 r^2 + \lambda)\big]R(r) = 0 \tag{4.2.5}$$

和角向部分

$$\big[\partial_\theta^2 + \cot\theta\partial_\theta - \big(a\omega\sin\theta - \frac{m}{\sin\theta}\big)^2 - \mu_0^2 a^2\cos^2\theta + \lambda\big]S(\theta) = 0, \tag{4.2.6}$$

式中λ为分离变量常数, $K=\omega(r^2+a^2)-eQr-ma$.

在第二章中我们已研究了Kerr-Newman黑洞中标量场方程的分离变量解, 指出其角向部分和径向部分都属于自旋权重的椭球波函数, 并证明它们实际上是合流的Heun函数. 角向部分的椭球波函数$S(\theta)$与讨论Hawking辐射无关, 因此这里不加考虑. 径向方程(4.2.5)化为

$$\big[\Delta\partial_r^2+2(r-M)\partial_r+\frac{K^2}{\Delta}-(\mu_0^2r^2+\lambda)\big]R(r)=0\,. \tag{4.2.7}$$

作乌龟坐标变换 $dr_*=\frac{r^2+a^2}{\Delta}dr$,

$$r_*=r+\frac{1}{2\kappa_+}\ln\frac{r-r_+}{r_+}+\frac{1}{2\kappa_-}\ln\frac{r-r_-}{r_-}\,, \tag{4.2.8}$$

式中$\kappa_\pm=(r_\pm-M)/(r_\pm^2+a^2)=(r_\pm-M)/(2Mr_\pm-Q^2)$. 当$r\to r_\pm$时, 方程(4.2.7)在乌龟坐标变换(4.2.8)下化为

$$\big[\frac{\partial^2}{\partial {r_*}^2}+(\omega-\omega_\pm)\big]R(r_*)=0\,, \tag{4.2.9}$$

其中$\omega_\pm=m\Omega_\pm+e\Phi_\pm$. $\Omega_\pm=a/(r_\pm^2+a^2)$, $\Phi_\pm=Qr_\pm/(r_\pm^2+a^2)$ 分别为黑洞内外视界的拖曳角速度和两极处的电势.

§4.2.2 Dirac场方程

Page [243]给出了Kerr-Newman黑洞中质量μ_0带电荷e的粒子满足的Dirac方程的旋量表示. 在Newman-Penrose(NP)表述中, 四个耦合的Chandrasekhar-Dirac-Page方程为

$$\begin{aligned}
&(D+\epsilon-\tilde{\rho}+ie\mathbf{A}\cdot\mathbf{l})F_1+(\overline{\delta}+\tilde{\pi}-\alpha+ie\mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{m}})F_2=\frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}G_1\,,\\
&(\underline{\Delta}+\mu-\gamma+ie\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})F_2+(\delta+\beta-\tau+ie\mathbf{A}\cdot\mathbf{m})F_1=\frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}G_2\,,\\
&(D+\epsilon^*-\tilde{\rho}^*+ie\mathbf{A}\cdot\mathbf{l})G_2-(\delta+\tilde{\pi}^*-\alpha^*+ie\mathbf{A}\cdot\mathbf{m})G_1=\frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}F_2\,,\\
&(\underline{\Delta}+\mu^*-\gamma^*+ie\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})G_1-(\overline{\delta}+\beta^*-\tau^*+ie\mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{m}})G_2=\frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}F_1\,.
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

在采用Boyer-Lindquist坐标[9]的Kerr-Newman度规中选取零标架系使方向导数为($\rho=r+ia\cos\theta$, $\rho^*=r-ia\cos\theta$)

$$\begin{aligned}
D &= \frac{r^2+a^2}{\Delta}\partial_t + \partial_r + \frac{a}{\Delta}\partial_\varphi\,,\\
\underline{\Delta} &= \frac{\Delta}{2\Sigma}\Big(\frac{r^2+a^2}{\Delta}\partial_t - \partial_r + \frac{a}{\Delta}\partial_\varphi\Big)\,,\\
\delta &= \frac{1}{\sqrt{2}\rho}\Big(ia\sin\theta\partial_t + \partial_\theta + \frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi\Big)\,,\\
\overline{\delta} &= \frac{1}{\sqrt{2}\rho^*}\Big(-ia\sin\theta\partial_t + \partial_\theta - \frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi\Big)\,.
\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

不为零的NP旋系数为

$$\begin{aligned}
&\tilde{\rho} = -\frac{1}{\rho^*},\ \mu = -\frac{\Delta}{2\Sigma\rho^*},\ \gamma = \mu + \frac{r-M}{2\Sigma},\ \tau = -\frac{ia\sin\theta}{\sqrt{2}\Sigma},\\
&\tilde{\pi} = \frac{ia\sin\theta}{\sqrt{2}\rho^{*2}},\ \beta = \frac{\cot\theta}{2\sqrt{2}\rho},\ \alpha = \tilde{\pi} - \beta^*.
\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

电磁势在上述零标架上的投影为

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{l} = -\frac{Qr}{\Delta},\quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = -\frac{Qr}{2\Sigma},\qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{m} = \mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{m}} = 0\,. \tag{4.2.13}$$

将所需的各量代入方程(4.2.10)并作下述分离变量处理

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{R_1(r)}{\sqrt{2}\rho^*}S_1(\theta)e^{i(m\varphi-\omega t)},\quad F_2 = \frac{R_2(r)}{\sqrt{\Delta}}S_2(\theta)e^{i(m\varphi-\omega t)},\\
G_1 &= \frac{R_2(r)}{\sqrt{\Delta}}S_1(\theta)e^{i(m\varphi-\omega t)},\quad G_2 = \frac{R_1(r)}{\sqrt{2}\rho}S_2(\theta)e^{i(m\varphi-\omega t)}
\end{aligned}$$

后可得到径向部分

$$\begin{aligned}
\sqrt{\Delta}\mathcal{D}_0 R_1 &= (-\lambda + i\mu_0 r)R_2\,,\\
\sqrt{\Delta}\mathcal{D}_0^\dagger R_2 &= -(\lambda + i\mu_0 r)R_1
\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

和角向方程

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{1/2}^\dagger S_1 &= (-\lambda + \mu_0 a\cos\theta)S_2\,,\\
\mathcal{L}_{1/2} S_2 &= (\lambda + \mu_0 a\cos\theta)S_1\,,
\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

式中定义了

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_n &= \partial_r - \frac{iK}{\Delta} + 2n\frac{r-M}{\Delta},\quad \mathcal{L}_n = \partial_\theta + n\cot\theta - a\omega\sin\theta + \frac{m}{\sin\theta},\\
\mathcal{D}_n^\dagger &= \partial_r + \frac{iK}{\Delta} + 2n\frac{r-M}{\Delta},\quad \mathcal{L}_n^\dagger = \partial_\theta + n\cot\theta + a\omega\sin\theta - \frac{m}{\sin\theta}.
\end{aligned}$$

当$\mu_0 = 0$时，径向方程和角向方程均可化成广义椭球波方程；当$\mu_0 \neq 0$时，则为一般形式的Bocher方程. 角向方程与讨论Hawking辐射无关. 由一阶方程(4.2.14)可得到二阶方程

$$\begin{aligned}
&\left[\Delta\mathcal{D}_{1/2}^{\dagger}\mathcal{D}_0 - (\mu_0^2 r^2 + \lambda^2)\right]R_1 = i\mu_0\sqrt{\Delta}R_2\,,\\
&\left[\Delta\mathcal{D}_{1/2}\mathcal{D}_0^{\dagger} - (\mu_0^2 r^2 + \lambda^2)\right]R_2 = -i\mu_0\sqrt{\Delta}R_1\,,
\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

此即

$$\begin{aligned}
&\big[\Delta\partial_r^2 + (r-M)\partial_r + \frac{K^2 + iK(r-M)}{\Delta} - i(2\omega r - eQ)\\
&\qquad -(\mu_0^2 r^2 + \lambda^2)\big]R_1 = i\mu_0\sqrt{\Delta}R_2\,,\\
&\big[\Delta\partial_r^2 + (r-M)\partial_r + \frac{K^2 - iK(r-M)}{\Delta} + i(2\omega r - eQ)\\
&\qquad -(\mu_0^2 r^2 + \lambda^2)\big]R_2 = -i\mu_0\sqrt{\Delta}R_1\,.
\end{aligned} \tag{4.2.17}$$

径向函数$R_1(r)$和$R_2(r)$互为复共轭, 我们取

$$R_1 = (P_1 + iP_2)/\sqrt{2}\,, \qquad R_2 = (P_1 - iP_2)/\sqrt{2}$$

后将径向方程化为实形式如下

$$\begin{aligned}
&(\Delta\partial_r + \lambda\sqrt{\Delta})P_1 = (\mu_0 r\sqrt{\Delta} - K)P_2\,,\\
&(\Delta\partial_r - \lambda\sqrt{\Delta})P_2 = (\mu_0 r\sqrt{\Delta} + K)P_1\,,
\end{aligned} \tag{4.2.18}$$

$$\begin{aligned}
&\big[\Delta\partial_r^2 + (r-M)\partial_r + \frac{K^2}{\Delta} - (\mu_0^2 r^2 + \lambda^2)\big]P_1\\
&\qquad = \big[\mu_0\sqrt{\Delta} + \frac{K(r-M)}{\Delta} - 2\omega r + eQ\big]P_2\,,\\
&\big[\Delta\partial_r^2 + (r-M)\partial_r + \frac{K^2}{\Delta} - (\mu_0^2 r^2 + \lambda^2)\big]P_2\\
&\qquad = \big[\mu_0\sqrt{\Delta} - \frac{K(r-M)}{\Delta} + 2\omega r - eQ\big]P_1\,.
\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

当$r \to r_\pm$时, 方程(4.2.18)和(4.2.19)在前一小节中引入的乌龟坐标变换下化为

$$\frac{\partial}{\partial r_*}P_1 = -(\omega - \omega_\pm)P_2\,, \qquad \frac{\partial}{\partial r_*}P_2 = (\omega - \omega_\pm)P_1\,, \tag{4.2.20}$$

$$\begin{aligned}
&\big[\frac{\partial^2}{\partial {r_*}^2} + (\omega - \omega_\pm)^2 - \kappa_\pm\frac{\partial}{\partial r_*}\big]P_1 = \kappa_\pm(\omega - \omega_\pm)P_2\,,\\
&\big[\frac{\partial^2}{\partial {r_*}^2} + (\omega - \omega_\pm)^2 - \kappa_\pm\frac{\partial}{\partial r_*}\big]P_2 = -\kappa_\pm(\omega - \omega_\pm)P_1\,.
\end{aligned} \tag{4.2.21}$$

利用(4.2.20)式可将方程(4.2.21)进一步化简为标准形式的波方程

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial {r_*}^2}+(\omega-\omega_\pm)^2\Big]P(r_*)=0\,,\qquad (P=P_1,\ P_2)\,. \tag{4.2.22}$$

于是标量场方程(4.2.9)和Dirac场方程(4.2.22)在视界附近有相同的渐近形式,因此可将它们合写为

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial {r_*}^2}+(\omega-\omega_\pm)^2\Big]\Psi(r_*)=0\,,\quad \Psi=\begin{cases}\Phi & (s=0)\\ P & (s=1/2)\end{cases}\,. \tag{4.2.23}$$

方程(4.2.23)的解为

$$\Psi(r_*)\sim e^{\pm i(\omega-\omega_\pm)r_*}\,. \tag{4.2.24}$$

§4.2.3 Hawking辐射

于是黑洞(内、外)视界表面处的入射波和向外的出射波为:

$$\Psi^{\rm in}=e^{-i\omega t-i(\omega-\omega_\pm)r_*}\,, \tag{4.2.25}$$

$$\Psi^{\rm out}=e^{-i\omega t+i(\omega-\omega_\pm)r_*}\,. \tag{4.2.26}$$

引入超前的类EF坐标$v=t+\frac{\omega-\omega_\pm}{\omega}r_*$和推迟的类EF坐标$u=t-\frac{\omega-\omega_\pm}{\omega}r_*$后,可将(4.2.25)和(4.2.26)两式改写为

$$\Psi^{\rm in}=e^{-i\omega v}=e^{-i\omega u}e^{-2i(\omega-\omega_\pm)r_*}\,, \tag{4.2.27}$$

$$\Psi^{\rm out}=e^{-i\omega u}=e^{-i\omega v}e^{2i(\omega-\omega_\pm)r_*}\,. \tag{4.2.28}$$

现在我们采用超前的类EF坐标v来讨论Kerr-Newman黑洞外视界上的热辐射,并在上两式中取ω_+. 在外视界附近有

$$r_*\sim\frac{1}{2\kappa_+}\ln\frac{r-r_+}{r_+}\,.$$

由此可知出射波

$$\Psi^{\rm out}=e^{-i\omega v}e^{2i(\omega-\omega_+)r_*}\sim e^{-i\omega v}\big(r-r_+\big)^{i(\omega-\omega_+)/\kappa_+}\,,\quad (r>r_+) \tag{4.2.29}$$

在外视界$r=r_+$上不解析. 以r_+为圆心, $|r-r_+|$为半径, 沿下半复r-平面把它解析延拓到黑洞内部,

$$(r-r_+)\longrightarrow(r_+-r)e^{-i\pi}$$

在外视界内, 我们有

$$\widetilde{\Psi^{\rm out}} \sim e^{-i\omega v}\left(r_+ - r\right)^{i(\omega-\omega_+)/\kappa_+} e^{\pi(\omega-\omega_+)/\kappa_+}, \quad (r_- < r < r_+). \tag{4.2.30}$$

由此可以得到出射波在外视界上的相对散射几率, 并证明有温度为$T_+ = \kappa_+/(2\pi)$的黑体辐射谱为

$$\langle \mathcal{N}_\omega^+ \rangle = \frac{1}{e^{(\omega-\omega_+)/T_+} \pm 1} \tag{4.2.31}$$

的出射波从黑洞视界射出. 其中正号代表Fermi-Dirac统计, 而负号对应于Bose-Einstein的分布. 热谱(4.2.31)对所有自旋种类的粒子成立, 例如最近荆继良[250]用DRS法研究了Kerr-Newman黑洞中热辐射粒子为光子的情形, 得到了相同的结果. 只是对于光子, 因其为不带电中性的粒子, 谱(4.2.31)中缺少$e\Phi_+$项.

我们看到, 转动和带电的黑洞, 除有能谱$\mu_0 < \omega \leq \omega_+$ 的受激辐射和自发辐射外, 还有$\omega \geq \omega_+$的热辐射.

§4.2.4 Hawking"吸收"

大多数观点认为Kerr-Newman度规描述黑洞视界外部$(r > r_+)$的引力场, 而视界内部$(r < r_+)$则由Einstein场方程的流体解描述, 那么按照这种观点, 解释外视界的Hawking 辐射产生的机制与Schwarzschild黑洞有些类似, 不存在很大困难.

但是如果我们采纳另一种观点, 认为整个黑洞时空都由Kerr-Newman线元描述, 则因为有内视界存在, 负能反粒子到达内视界后不能顺时前进到达奇区, 使通常解释Hawking辐射的机制出现了困难[51]. 赵峥提出了在内视界有Hawking"吸收"[108, 262–265] 的设想去解决这个困难[109–111]. 他认为奇区产生辐射的正能粒子流顺时穿过"空腔"到达内视界后, 在那里被散射, 逆时穿过单向膜区, 在外视界处再次被散射, 然后顺时飞向远处, 形成Hawking辐射.

对于黑洞外的观测者而言, 外视界是未来视界, 但是对于内视界所包围的"空腔"中的观测者, 内视界是过去视界. 因此可认为, 外视界附近的Hawking辐射的时间反演对应于内视界附近的的Hawking"吸收". 这就是说内视界从腔内的真空中获取温度为$T_- = \kappa_-/(2\pi)$的热辐射, 留下逆时运动的负能反粒子到达奇区. 换而言之, 即内禀奇异区发射温度为$T_- = \kappa_-/(2\pi)$的热辐射, 辐射粒子顺时射向内视界并被其吸收.

在采用推迟的类EF坐标u后, Klein-Gordon方程和Dirac方程在内、外视界附近的出射波解和入射波解分别成为

$$\Psi^{\text{out}} = e^{-i\omega u} = e^{-i\omega v} e^{2i(\omega-\omega_\pm)r_*}, \tag{4.2.32}$$

$$\Psi^{\text{in}} = e^{-i\omega v} = e^{-i\omega u} e^{-2i(\omega-\omega_\pm)r_*}. \tag{4.2.33}$$

在上一小节中我们已讨论了外视界(未来视界)的Hawking辐射. 现在我们只对内视界(过去视界)的情况感兴趣, 即在u-坐标中讨论, 并在上两式中取ω_-. 此时, (4.2.32)式表示内视界射向奇区的出射波, 而(4.2.33)式则表示由奇区到内视界的入射波. 在Kerr-Newman时空中, 乌龟坐标的总定义是 $dr_*/dr = (r^2+a^2)/\Delta$,

$$r_* = r + \frac{1}{2\kappa_+}\ln\frac{|r-r_+|}{r_+} + \frac{1}{2\kappa_-}\ln\frac{|r-r_-|}{r_-}. \tag{4.2.34}$$

在内视界$r = r_-$附近

$$r_* \sim \frac{1}{2\kappa_-}\ln\frac{r_- - r}{r_-},$$

于是

$$\Psi^{\text{in}} = e^{-i\omega u} e^{-2i(\omega-\omega_-)r_*} \sim e^{-i\omega u}\big(r_- - r\big)^{-i(\omega-\omega_-)/\kappa_-}, \quad (0 < r < r_-). \tag{4.2.35}$$

在内视界$r = r_-$上非解析, 沿上半复r-平面把它解析延拓到内视界的外侧(单向膜区: $r_- < r < r_+$)

$$(r_- - r) \longrightarrow (r - r_-)e^{i\pi}$$

所以有

$$\widetilde{\Psi^{in}} \sim e^{-i\omega u}\big(r - r_-\big)^{-i(\omega-\omega_-)/\kappa_-} e^{\pi(\omega-\omega_-)/\kappa_-}, \quad (r_- < r < r_+). \tag{4.2.36}$$

于是可以得到波在内视界上的相对散射几率, 并证明有温度为$T_- = \kappa_-/(2\pi)$射入到内视界的热谱

$$\langle \mathcal{N}_\omega^- \rangle = \frac{1}{e^{(\omega-\omega_-)/T_-} \pm 1}. \tag{4.2.37}$$

实际上奇区$(0 < r < r_-)$与黑洞外部$(r_+ < r < \infty)$有非常相似的几何结构, 如果采用v-坐标并在下半复r-平面作解析延拓, 同样可以求得射入内视界的热辐射谱(4.2.37).

于是我们证明了内视界果真存在Hawking"吸收"效应, 有热辐射从腔内射入内视界. 这种来自空腔射向内视界的辐射一定是温度为$T_- = \kappa_-/(2\pi)$ 的黑体辐射.

事实上, 如果Kerr-Newman黑洞外视界产生Hawking辐射, 那么应该有从奇区产生并穿过空腔到达内视界的辐射存在. 这样我们才能克服解释带电黑洞Hawking辐射的困难. 奇区是温度为T_-的热源, 它产生的热辐射正是Hawking 辐射的根源.

于是我们可以有如下几种等价的说法来解释Kerr-Newman黑洞的Hawking辐射:

- 奇区发出温度为T_-的热辐射在内视界处被散射后, 逆时穿过单向膜区达到外视界并降温到T_+, 在外视界处再次被散射后, 顺时跑向远方. 视界处的散射起着改变时间方向的作用.

- 外视界发射温度为T_+的Hawking辐射时, 负能反粒子通过遂道效应进入视界内, 顺时达到内视界并升温到T_-, 在内视界附近与来自奇区的正能粒子相复合达到真空态.

- 奇区产生辐射的正能粒子穿过空腔到达内视界, 与那里来自外视界的负能粒子湮灭成真空态.

因此, 我们可以认为内视界上的Hawking"吸收"是外视界上Hawking辐射的时间反演过程.

§4.2.5 奇区的温度

我们已经证明内禀奇区发射温度为$T_- = \kappa_-/(2\pi)$的热辐射, 即奇区具有用辐射来定义的温度T_-. 奇区的温度是内视界处辐射的温度, 而外视界的温度T_+是黑洞外辐射的温度.

如果把外视界看作一个正常的正温度系统($T_+ > 0$), 那么内视界可看成一个反常的负温度系统($T_- < 0$), 而且$|T_-| > T_+$. 当Kerr-Newman黑洞过渡到极端情形时, $T_+ \to 0^+$, 而$T_- \to 0^-$. 在a和Q趋于零时的极限, 内视界缩小与奇点重合, 温度T_-趋于负无穷大, 但外视界的温度趋于Schwarzschild 黑洞的Hawking温度$1/(8\pi M)$.

人们已经证明, 外视界对微扰是稳定的[116], 而内视界在量子力学上是不稳定的[266, 267]. 对于内视界这个反常热力学系统, 其负的高温意味着在热力学上是不稳定的, 似乎只有通过"吸收"辐射才能使其趋于正常状态. 在这个意义上说, 奇区的热辐射是黑洞向外辐射的源泉.

把Kerr-Newman黑洞看作内、外视界组成的复合热力学系统, 提供了解决热力学第三定律(Nernst定理)隐含的内在冲突的一种可能途径[109–111].

§4.3 推广的黑洞热力学定律与Hawking辐射过程的量子守恒律

这一节把经典黑洞热力学的四个定律从外(事件)视界推广到内(Cauchy)视界上, 特别地, 还给出了Kerr-Newman黑洞内、外视界上热力学第一定律的量子形式. 然后由热力学平衡条件导出了Kerr-Newman黑洞蒸发过程的量子守恒律.

§4.3.1 Hawking辐射与Hawking"吸收"

由于Hawking和Bekenstein的杰出工作, 黑洞被证明是一个赋有温度和熵的热力学物体, 这把黑洞热力学第一定律建立在牢固的基础之上. 以后人们对黑洞热力学的量子的、动力学的或统计的起源进行了大量的研究, 但仍未解决其中的一些问题. 例如, Bekenstein-Hawking熵的精确起源和机制以及Nernst第三定律的解释等等.

这里我们假定一个转动带电黑洞的整个时空由Kerr-Newman度规描述, 并且在非极端情形($0 < \varepsilon = \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} \leq M$)下以Kerr-Newman 黑洞(KNBH)背景上无源带电的有质量的标量场为出发点进行讨论. 在这一假定下我们认为Kerr-Newman黑洞的内视界应该存在一个向内的热辐射, Kerr-Newman黑洞有两套温度和熵, 而且将Bardeen-Carter-Hawking关于外视界的黑洞热力学四定律推广到内视界上. 另外我们也建议了一对量子形式的热力学第一定律, 从热力学平衡的观点出发导出了黑洞平衡辐射过程中遵守的量子守恒律. 最后还简要地讨论了黑洞经典熵和量子熵的关系.

在第二章中我们已经讨论了Kerr-Newman黑洞背景上Klein-Gordon标量场方程的分离变量解, 指出其径向部分和角向部分都是广义椭球波函数, 即合流Heun函数. 在Kerr-Newman 几何中, 质量为μ_0、带电荷e的Klein-Gordon标量场方程(KGE)经过分离变量$\Phi(t,r,\theta,\varphi) = R(r)S_{m,0}^{\ell}(ka,\theta)e^{i(m\varphi-\omega t)}$后的径向部分为

$$\partial_r[\Delta\partial_r R(r)] + \Big[\frac{K^2(r)}{\Delta} - \mu_0^2(r^2+a^2) - \lambda + 2ma\omega\Big]R(r) = 0\,, \qquad (4.3.1)$$



式中λ为分离变量常数, $K(r)=\omega(r^2+a^2)-eQr-ma$, $\Delta=r^2-2Mr+a^2+Q^2=(r-r_+)(r-r_-)$, $r_\pm=M\pm\varepsilon$. M、Q和$a=J/M$分别是KNBH的质量、电荷和比角动量.

径向方程(4.3.1)可化为如下的虚数阶的广义自旋权重的椭球波方程

$$\begin{aligned}&\partial_r[(r-r_+)(r-r_-)\partial_r R(r)]+\Big[k^2(r-r_+)(r-r_-)\\&\quad+2D(r-M)+\frac{[A(r-M)+\varepsilon B]^2}{(r-r_+)(r-r_-)}-2eQM\omega\\&\quad+(2\omega^2-\mu_0^2)(2M^2-Q^2)-\lambda\Big]R(r)=0\,,\end{aligned}\tag{4.3.2}$$

其中我们已经令$A=2M\omega-eQ$, $\varepsilon B=\omega(2M^2-Q^2)-eQM-ma$, $D=A\omega-M\mu_0^2$, $k^2=\omega^2-\mu_0^2$. 为简便起见, 现在引入$W_\pm=(B\pm A)/2$. 当$r\to r_\pm$时, 径向波函数在视界$r_\pm$附近有渐近行为

$$R\sim\begin{cases}(r-r_+)^{\pm iW_+}\,, & (r\to r_+)\\ (r-r_-)^{\pm iW_-}\,, & (r\to r_-)\end{cases}\,.$$

作代换$R(r)=(r-r_+)^{i(B+A)/2}(r-r_-)^{i(B-A)/2}F(r)$后, 可以将方程(4.3.2)变为自旋权重为$iA$和推动权重为$iB$的修正的广义椭球波方程

$$\begin{aligned}&(r-r_+)(r-r_-)\partial_r^2F(r)+2[i\varepsilon A+(1+iB)(r-M)]\partial_rF(r)\\&\quad+\Big[k^2(r-r_+)(r-r_-)+2D(r-M)-2eQM\omega\\&\quad+(2\omega^2-\mu_0^2)(2M^2-Q^2)-\lambda+A^2-B^2+iB\Big]F(r)=0\,.\end{aligned}\tag{4.3.3}$$

方程(4.3.3)有两个奇点$r=r_\pm$其指标分别为$\rho_+=0,-2iW_+$和$\rho_-=0,-2iW_-$. 方程(4.3.3)在正则奇点$r_\pm$处的一般解为

$$\begin{aligned}F_+(r)&=c_1f_1(r-r_+)+c_2(r-r_+)^{-2iW_+}g_1(r-r_+)\,,\\F_-(r)&=d_1f_2(r-r_-)+d_2(r-r_-)^{-2iW_-}g_2(r-r_-)\,,\end{aligned}\tag{4.3.4}$$

式中f_1,f_2分别为方程(4.3.3)在$r=r_\pm$处的一个解, 而g_1,g_2是它的另一个线性无关的另一个解. 在正则奇点$r=r_\pm$处, 广义椭球波函数可构成四组正交归一的完备集. 可以选取本征值λ使$F_\pm(r)$分别在$r=r_\pm$处为有限的, 即正则函数f_1,f_2和g_1,g_2在它们的取值区间上都是解析的. 从第二章中的研究可以看出, 解析函数f_1,f_2和g_1,g_2实际上与合流Heun函数仅相差一个乘子$e^{\pm ikr}$, 而它们可以在奇点$r=r_\pm$的邻域分别作解析解析延拓.

下面用指标法来讨论标量场在外(内)视界上的Hawking辐射("吸收"), 为此将内、外视界$r_\pm = M \pm \varepsilon$分别记为$\mathcal{H}_\pm$. 先考虑在区间$r_- < r < r_+$和$r_+ < r < \infty$上的从视界$\mathcal{H}_+$出来的出射波. 按照Damour-Ruffini 的方法, 一个正确的出射波$\Phi^{\rm out} = \Phi^{\rm out}(t, r, \theta, \varphi)$ 是函数$\Phi^{\rm out}_{r>r_+}$和$\Phi^{\rm out}_{r<r_+}$的适当叠加:

$$\Phi^{\rm out} = C_+[\eta(r - r_+)\Phi^{\rm out}_{r>r_+} + \eta(r_+ - r)\Phi^{\rm out}_{r<r_+} e^{2\pi W_+}]\,, \tag{4.3.5}$$

式中$\eta(x)$为通常的单位阶跃函数, 出射波分量$\Phi^{\rm out}_{r>r_+}$和$\Phi^{\rm out}_{r<r_+}$分别为

$$\begin{aligned}
\Phi^{\rm out}_{r>r_+}(t, r, \theta, \varphi) &\sim c_1(r - r_+)^{iW_+}(r - r_-)^{iW_-} f^{\ell}_{W_+, W_-}(k, r) S^{\ell}_{m,0}(ka, \theta) e^{i(m\varphi - \omega t)}\,, \\
\Phi^{\rm out}_{r<r_+}(t, r, \theta, \varphi) &\sim c_2(r - r_+)^{-iW_+}(r - r_-)^{iW_-} g^{\ell}_{W_+, W_-}(k, r) S^{\ell}_{m,0}(ka, \theta) e^{i(m\varphi - \omega t)}\,,
\end{aligned}$$

其中正则函数$f^{\ell}_{W_+, W_-}(k, r) = f_1$为径向的广义椭球波方程的一个解, 正则函数$g^{\ell}_{W_+, W_-}(k, r) = g_1$为其另一个解, 而$S^{\ell}_{m,0}(ka, \theta)$ 是常椭球波函数. 这些函数可正交归一化为完备集. 另外, 标量波函数Φ 在无穷远处有渐近行为

$$\Phi(t, r, \theta, \varphi) \longrightarrow e^{i(\pm kr - \omega t + m\varphi)} S^{\ell}_{m,0}(ka, \theta), \quad (r \to \pm\infty)\,.$$

实际上, 出射波分量$\Phi^{\rm out}_{r>r_+}$和$\Phi^{\rm out}_{r<r_+}$ 在$r \to r_+$时有渐近解

$$\begin{aligned}
\Phi^{\rm out}_{r>r_+} &\longrightarrow c_1(r - r_+)^{iW_+} S^{\ell}_{m,0}(ka, \theta) e^{i(m\varphi - \omega t)}\,, \quad (r \to r_+)\,. \\
\Phi^{\rm out}_{r<r_+} &\longrightarrow c_2(r - r_+)^{-iW_+} S^{\ell}_{m,0}(ka, \theta) e^{i(m\varphi - \omega t)}\,, \quad (r \to r_+)\,.
\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

显然出射波$\Phi^{\rm out}_{r>r_+}$不能直接从区间$r_+ < r < \infty$上延拓到区间$r_- < r < r_+$上, 但可以把它沿单位圆$r = r_+ - i0$的下半复r-平面解析延拓为位于视界$\mathcal{H}_+$内的出射波$\Phi^{\rm out}_{r<r_+}$,

$$r - r_+ \longrightarrow (r_+ - r)e^{-i\pi}\,.$$

通过这样的解析处理后, 我们有

$$\begin{aligned}
\Phi^{\rm out}_{r<r_+}(t, r, \theta, \varphi) \sim\ & c_2(r - r_+)^{-iW_+}(r - r_-)^{iW_-} f^{\ell}_{W_+, W_-}(k, r) \\
& \times S^{\ell}_{m,0}(ka, \theta) e^{i(m\varphi - \omega t)}\,,
\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

此处函数$f^{\ell}_{W_+, W_-}(k, r)$可以解析延拓为函数$g^{\ell}_{W_+, W_-}(k, r)$.

由于在函数$F^{\ell}_{W_+, W_-}(k, r) = (r - r_+)^{iW_+}(r - r_-)^{iW_-} f_1$ 和$G^{\ell}_{W_+, W_-}(k, r) = (r - r_+)^{-iW_+}(r - r_-)^{iW_-} g_1$之间出现了一个差别因子$(r - r_+)^{-2iW_+}$, 那么$\Phi^{\rm out}_{r>r_+}$与$\Phi^{\rm out}_{r<r_+}$相差一个乘子$e^{2\pi W_+}$, 因此我们可以导出关系式

$$\left|\frac{\Phi^{\rm out}_{r>r_+}}{\Phi^{\rm out}_{r<r_+}}\right|^2 = e^{-4\pi W_+}\,. \tag{4.3.8}$$

采用Damour-Ruffini方法, 容易得到外视界上“向外”的热辐射谱:

$$\langle\mathcal{N}_+\rangle = |\mathcal{C}_+|^2 = \frac{1}{e^{4\pi W_+}-1}\,. \tag{4.3.9}$$

类似地, 由于内、外视界的对称性, 与上面的外视界上“向右”的出射波$\Phi^{\rm out}$对应地有内视界$\mathcal{H}_-$上“向左”的出射波$\Psi^{\rm out}=\Psi^{\rm out}(t,r,\theta,\varphi)$,

$$\Psi^{\rm out} = \mathcal{C}_-\big[\eta(r_- - r)\Psi^{\rm out}_{r<r_-} + \eta(r-r_-)\Psi^{\rm out}_{r>r_-}e^{2\pi W_-}\big]\,. \tag{4.3.10}$$

沿单位圆$r=r_- + i0$的上半复r-平面对$\Psi^{\rm out}$作解析延拓

$$r_- - r \longrightarrow (r-r_-)e^{-i\pi}\,,$$

可以得到内视界上的相对散射几率

$$\left|\frac{\Psi^{\rm out}_{r<r_-}}{\Psi^{\rm out}_{r>r_-}}\right|^2 = e^{-4\pi W_-} \tag{4.3.11}$$

和“向内”的黑体辐射谱:

$$\langle\mathcal{N}_-\rangle = |\mathcal{C}_-|^2 = \frac{1}{e^{4\pi W_-}-1}\,. \tag{4.3.12}$$

不难从热谱(4.3.9)和(4.3.12)中看出, 它们与标量场方程的解在内、外视界上的指标有关, 因此我们称这一方法为指标法.

§4.3.2 推广的黑洞热力学定律

形式地引入下述符号将是非常方便的:

$$\begin{aligned}
&\text{约化视界面积}:\mathcal{A}_\pm = r_\pm^2 + a^2\,, &&\text{视界位置}:r_\pm = M\pm\varepsilon\,,\\
&\text{表面引力}:\kappa_\pm = (r_\pm - M)/\mathcal{A}_\pm\,, &&\text{角速度}:\Omega_\pm = a/\mathcal{A}_\pm\,,\\
&\text{静电势}:\Phi_\pm = Qr_\pm/\mathcal{A}_\pm\,, &&\text{圆频率}:\omega_\pm = m\Omega_\pm + e\Phi_\pm\,.
\end{aligned}$$

我们可以用代数方法导出如下经典的和量子的在内、外视界$\mathcal{H}_+$上的推广的黑洞热力学第一定律表达式的微分形式和积分形式(见附录A).

a. 推广的经典热力学第一定律的积分形式和微分形式:

$$dM = \frac{\kappa_\pm}{2} dA_\pm + \Omega_\pm dJ + \Phi_\pm dQ \,, \tag{4.3.13}$$
$$M = \kappa_\pm \mathcal{A}_\pm + 2J\Omega_\pm + Q\Phi_\pm \,. \tag{4.3.14}$$

b. 推广的量子热力学第一定律的积分形式和微分形式:

$$\omega = 2\kappa_\pm W_\pm + m\Omega_\pm + e\Phi_\pm \,, \tag{4.3.15}$$
$$d\omega = 2\kappa_\pm dW_\pm + \Omega_\pm dm + \Phi_\pm de \,. \tag{4.3.16}$$

(4.3.13)和(4.3.14)式表明电磁相互作用能$Q\Phi_\pm$是一个"规范"项，而$\kappa_\pm \mathcal{A}_\pm$和$J\Omega_\pm$为"自能"项.

下面陈述推广的黑洞热力学四定律的主要论点:

- **第零定律**: 稳态平衡黑洞的表面引力(温度)$\kappa_\pm$在其内、外视界$\mathcal{H}_\pm$上分别是一个常数.

- **第一定律**: 在一个孤立的包含黑洞的系统中，系统的总能量是守恒的.

- **第二定律**: 在任何物理过程中，总熵$S_{\rm T} = S_{\rm BH} + S_{\rm M}$决不减少，$\delta S_{\rm T} \geq 0$. $S_{\rm M}$为黑洞外或者奇区内通常物质的总熵.

- **第三定律**: 不可能通过任何物理过程和经过有限次操作使温度$\kappa_\pm$达到零度. 然而量子真空涨落可以违反这个定律. 量子蒸发效应可以使Kerr-Newman黑洞经历一个从非极端情形($M^2 \neq a^2 + Q^2$)到极端情形($M^2 = a^2 + Q^2$)的二级相变[268].

上面的定律实际上是说，Kerr-Newman黑洞的外视界和黑洞的外部环境构成一个复合的热力学系统，而内视界和内禀奇异区也构成另一个复合的热力学系统. 这两个复合系统各自有一套热力学四定律. 如果把Kerr-Newman黑洞看作由内、外视界组成的复合热力学系统，则有可能解决Nernst第三定律中隐含的矛盾[109-111].

§4.3.3 黑洞平衡辐射过程的量子守恒律

现在考虑标量场Φ在一对局部温度$T_\pm = \kappa_\pm/2$下与Kerr-Newman黑洞处于热平衡状态，亦即上述两个复合热力学系统各自处于热力学平衡状态. 在热平衡辐射过程中，表面引力、角速度和静电势可以认为基本上保持不变. 于是在内外视


博士学位论文
DOCTORAL DISSERTATION

界上存在热力学平衡条件:

$$\kappa_{\pm-0} = \kappa_{\pm+0}\,, \quad \Omega_{\pm-0} = \Omega_{\pm+0}\,, \quad \Phi_{\pm-0} = \Phi_{\pm+0}\,.$$

结合微分关系式(4.3.13)和(4.3.16), 可以导出关于能量、角动量、电荷和熵的量子守恒定律的五个关系式:

$$dM = nd\omega\,, \quad (\text{能量}) \tag{4.3.17}$$

$$dJ = ndm\,, \quad (\text{角动量}) \tag{4.3.18}$$

$$dQ = nde\,, \quad (\text{电荷}) \tag{4.3.19}$$

$$\frac{1}{4}d\mathcal{A}_\pm = ndW_\pm\,, \quad (\text{熵}) \tag{4.3.20}$$

式中n为一个整数乘子. 从积分关系式(4.3.14)和(4.3.15), 也可以得到一个特殊的量子态$nm = J$, $n\omega = M/2$, $ne = Q/2$, $nW_\pm = \mathcal{A}_\pm/4$.

方程(4.3.17-4.3.20)意味着在热平衡辐射过程中, Kerr-Newman黑洞的能量、角动量、电荷和熵的改变是呈离散化(分立)的, (4.3.20)表明在内、外视界上两个复合热力学系统的熵分别是守恒的. 当Kerr-Newman黑洞与标量场处于热动平衡状态时, 它辐射的量子与吸收的量子一样多, 这种平衡辐射是一种细致平衡[269]. 因此在热平衡辐射过程中, 由黑洞和标量场构成的整个系统的能量、电荷、角动量和熵的总量保持不变.

• 量子守恒定律: 在黑洞的热平衡辐射过程中, 系统的总能量、总电荷、总角动量和总熵都是守恒的.

§4.3.4 热谱、熵与温度

量子数$W_\pm$为标量场在内、外视界上的量子熵. 当标量场的质量$\mu_0 = 0$时, A, B, ε分别与$-m, -s, -a$相对应, 量子数$nW_\pm$可以为整数. 因此量子熵$nW_\pm$可以是离散的, 即为整数. 束缚态的谱$\langle\mathcal{N}_\pm\rangle$是离散的, 而散射态的谱是连续的.

事实上, 方程(4.3.20)是一对推广的热力学第二定律的量子形式. 积分这个方程可以得到黑洞的量子熵,

$$nW_\pm = \frac{1}{4}\mathcal{A}_\pm + C_\pm\,. \tag{4.3.21}$$

由于Bekenstein-Hawking熵为$S_\pm = A_\pm/4 = \pi\mathcal{A}_\pm$, 量子熵$nW_\pm$等价于约化熵$\mathcal{S}_\pm = S_\pm/(4\pi)$, 所以有Bekenstein-Hawking关系式(选取积分常数$C_\pm = 0$):

$$\mathcal{S}_\pm = nW_\pm = \mathcal{A}_\pm/4\,. \tag{4.3.22}$$

方程(4.3.22)建议经典的Bekenstein-Hawking熵在统计上起源于量子化的标量场的熵，换而言之，经典的黑洞熵等于量子场的量子熵.

从Hawking辐射的热谱

$$\langle \mathcal{N}_\pm \rangle = \frac{1}{e^{4\pi W_\pm} - 1}\,, \qquad W_\pm = \frac{\omega - m\Omega_\pm - e\Phi_\pm}{2\kappa_\pm}$$

中，可以推知Kerr-Newman黑洞在视界$\mathcal{H}_\pm$上分别有一个局部温度$T_\pm = \kappa_\pm/(2\pi) = \mathcal{T}_\pm/\pi$. 如果人们接受表面引力$\kappa_\pm = \pm\varepsilon/(r_\pm^2 + a^2)$的温度阐释的话，那么外视界上的温度$T_+$是正的，而内视界上的温度$T_-$为负的. 这意味着外视界是正常的正温系统，内视界是反常的负温系统. 负温度的定义与通常热力学对温度的定义$T = \partial E/\partial S$是一致的，与黑洞有负的比热也不矛盾.

在这一节中，我们把关于外视界上的许多结果都推广到内视界上. 如果整个时空是由Kerr-Newman线元描述的话，则在内(Cauchy)视界上应该有内辐射(Hawking"吸收"). 这一节提供了黑洞熵起源的一个较好的解释，即经典的黑洞熵在统计上起源于场量子的量子熵. 如果Kerr-Newman黑洞果真有两套温度和熵的，那么该如何解释它们呢？一种可能的建议认为Kerr-Newman黑洞是一个双能级的复合热力学系统，在内、外视界上各有一个局域温度. 就现有的理论而言，没有先验的理由排斥负温度T_-.

§4.4 Kerr-Sen黑洞中的标量粒子的热辐射

本节用Damour-Ruffini-Sannan(DRS)方法考察Kerr-Sen黑洞背景上标量粒子的Hawking蒸发，表明Kerr-Sen黑洞与Kerr-Newman黑洞在量子热效应上有相似的特征. DRS方法只需要求存在一个未来视界，与导致这个视界形成的过程的动力学细节完全无关. 这个方法假定了在复化的流形上波函数的解析特征.

第二章已经研究了Kerr-Sen时空中质量为μ_0、带电荷e的复标量场方程的精确解，表明其分离变量后的径向部分和角向部分均可化为广义自旋权重的椭球波方程，即合流的Heun方程.

在分离变量$\Phi(t, r, \theta, \varphi) = R(r)S_{m,0}^{\ell}(ka, \theta)e^{i(m\varphi - \omega t)}$后，Klein-Gordon方程的径向部分为



$$\partial_r[\Delta\partial_r R(r)] + \left[\frac{K^2(r)}{\Delta} - \mu_0^2(r^2 + 2br + a^2) - \lambda + 2ma\omega\right]R(r) = 0\,, \qquad (4.4.1)$$

式中λ为分离变量常数. $K(r) = \omega(r^2+2br+a^2) - eQr - ma$, $\Delta = r^2+2(b-M)r+a^2 = (r-r_+)(r-r_-)$, $r_\pm = M - b \pm \epsilon$, $\epsilon = \sqrt{(M-b)^2 - a^2}$, $b = Q^2/2M$.

方程(4.4.1)可改写为

$$\partial_r[\Delta\partial_r R(r)] + \left[\frac{(Ar - ma)^2}{\Delta} + k^2\Delta + 2Dr - \lambda\right]R(r) = 0\,, \qquad (4.4.2)$$

式中已令$A = 2M\omega - eQ$, $D = A\omega - M\mu_0^2$, $k = \sqrt{\omega^2 - \mu_0^2}$ (假定$\omega > \mu_0$). 为方便后面的讨论起见, 我们引入记号$\epsilon B = A(M-b) - ma$, $W_\pm = (A \pm B)/2$.

方程(4.4.2)在正则奇点$r = r_\pm$处的指标分别为$\pm iW_+$和$\pm iW_-$, 其径向波函数$R(r)$在内、外视界处有如下的渐近行为:

$$R(r) \sim \begin{cases} (r - r_+)^{\pm iW_+}\,, & (r \to r_+) \\ (r - r_-)^{\pm iW_-}\,, & (r \to r_-) \end{cases} \qquad (4.4.3)$$

在作代换$R(r) = (r - r_+)^{i(A+B)/2}(r - r_-)^{i(A-B)/2}F(r)$后, 可以把关于$R(r)$的方程(4.4.2)变换为关于$F(r)$的具有虚的自旋权重为$iA$、推动权重为$iB$的修正的广义椭球波方程[163]:

$$\begin{aligned}\Delta\partial_r^2 F(r) &+ 2[i\epsilon B + (1 + iA)(r - M + b)]\partial_r F(r) \\ &+ \left[k^2\Delta + 2Dr + iA - \lambda\right]F(r) = 0\,.\end{aligned} \qquad (4.4.4)$$

方程(4.4.4)在奇点$r = r_\pm$处的指标分别为$\rho_+ = 0,\ -2iW_+$和$\rho_- = 0,\ -2iW_-$. 在每一奇点附近有两个线性无关的解— 合流Heun函数. 在无穷远处, $R(r)$有渐近形式$e^{\pm ikr}$.

下面将考虑在区间$r_+ < r < \infty$上从视界r_+发出的出射波. 按照DRS方法, 一个正确的出射波$\Phi^{\rm out} = \Phi^{\rm out}(t, r, \theta, \varphi)$为函数$\Phi^{\rm out}_{r>r_+} = \Phi^{\rm out}_{r>r_+}(t, r, \theta, \varphi)$和$\Phi^{\rm out}_{r<r_+} = \Phi^{\rm out}_{r<r_+}(t, r, \theta, \varphi)$的适当叠加:

$$\Phi^{\rm out} = \mathcal{C}\left[\eta(r - r_+)\Phi^{\rm out}_{r>r_+} + \eta(r_+ - r)\Phi^{\rm out}_{r<r_+}e^{2\pi W_+}\right], \qquad (4.4.5)$$

式中$\eta(x)$为通常的单位阶跃函数, $\mathcal{C}$为归一化因子.

当$r \to r_+$时, 出射波分量$\Phi^{\rm out}_{r>r_+}$和$\Phi^{\rm out}_{r<r_+}$有渐近行为:

$$
\begin{aligned}
\Phi^{\text{out}}_{r>r_+} &\longrightarrow c_1(r-r_+)^{iW_+}S^{\ell}_{m,0}(ka,\theta)e^{i(m\varphi-\omega t)}\,, \quad (r\to r_+)\\
\Phi^{\text{out}}_{r<r_+} &\longrightarrow c_2(r-r_+)^{-iW_+}S^{\ell}_{m,0}(ka,\theta)e^{i(m\varphi-\omega t)}\,, \quad (r\to r_+)
\end{aligned}
\tag{4.4.6}
$$

显然出射波$\Phi^{\text{out}}_{r>r_+}$不能直接从$r_+ < r < \infty$延拓到$r_- < r < r_+$, 但它可沿单位圆$r = r_+ - i0$的下半复$r$-平面解析延拓为位于事件视界$r_+$内的出射波$\Phi^{\text{out}}_{r<r_+}$,

$$
r - r_+ \longrightarrow (r_+ - r)e^{-i\pi}\,.
$$

通过这样的解析延拓处理后有

$$
\Phi^{\text{out}}_{r<r_+} \sim c_2(r-r_+)^{-iW_+}S^{\ell}_{m,0}(ka,\theta)e^{i(m\varphi-\omega t)}\,. \tag{4.4.7}
$$

由于出现了一个差别因子$(r-r_+)^{-2iW_+}$, 那么$\Phi^{\text{out}}_{r>r_+}$与$\Phi^{\text{out}}_{r<r_+}$相差一个乘子$e^{2\pi W_+}$, 则可得到标量波在事件视界的相对散射几率为

$$
\left|\frac{\Phi^{\text{out}}_{r>r_+}}{\Phi^{\text{out}}_{r<r_+}}\right|^2 = e^{-4\pi W_+} \tag{4.4.8}
$$

和温度为$T = \kappa/2\pi$的热辐射谱

$$
\langle\mathcal{N}(\omega)\rangle = |\mathcal{C}|^2 = \frac{1}{e^{4\pi W_+}-1}\,, \qquad W_+ = \frac{Ar_+ - ma}{2\epsilon} = \frac{\omega - m\Omega - q\Phi}{2\kappa}\,, \tag{4.4.9}
$$

其中$\Omega = a/\mathcal{A}_+ = a/2Mr_+$, $\Phi = Qr_+/\mathcal{A}_+ = Q/2M = b/Q$ 和$\kappa = \epsilon/\mathcal{A}_+ = (r_+ - M + b)/2Mr_+$分别为视界上的角速度、静电势和表面引力, $\mathcal{A}_+ = r_+^2 + 2br_+ + a^2 = 2Mr_+$为约化的外视界面积.

从黑体辐射谱(4.4.9)可以看出, 它与标量场方程在视界r_+处的指标有关. 该热谱表明尽管Kerr-Sen的几何性质类似于Kerr黑洞但它的量子热性质却与Kerr-Newman黑洞相似. 相应地, 对于Kerr-Sen黑洞, 人们可以建立与Kerr-Newman黑洞非常类似的热力学四定律. 因此, 扭曲的Kerr黑洞在几何特征上类似于Kerr解, 但在量子热效应和热力学四定律方面却与Kerr-Newman黑洞非常相似.

第五章　动态黑洞的量子热效应 — 概论

"动态黑洞有与稳态黑洞不同的量子热效应".

§5.1　前言

我们已经看到, 不仅所有的稳态黑洞都有温度, 而且一切具有视界的稳态时空都有热效应. 但是, 实际的黑洞都不是稳态的, 它们总会与外界交换物质, 不停地从外界吸收辐射、尘埃等, 还不断向外发射热辐射. 那种不随时间变化的稳态黑洞只是一种理想情况, 真实的黑洞都在不断地吸收和辐射. 对于转动和带电的黑洞, 它们还会向外发出非热辐射. 因此真实黑洞的质量、电荷和角动量都在不停地变化着. 在本文中, 我们考虑的动态黑洞是其参数随时间而演化的黑洞.

探讨这些不断变化着的非稳态黑洞的热性质, 遇到了很大的困难. 研究稳态黑洞的热性质, 我们已经有了许多方法, 例如Bogliubov变换、路径积分、Green函数、解析延拓等等. 但是, 使用上述方法时都要预先假定黑洞与外界处于热平衡状态中, 而非稳态黑洞并不满足这一假设. 所以, 上述方法都不能直接用来研究动态黑洞的热性质. 为此, 一些复杂的近似方法被建立起来, 它们不仅计算不严密, 而且仅能用于研究渐近平直时空中的球对称动态黑洞. 近年来, 赵峥[51]等建议了一个行之有效的新方法— 广义乌龟坐标变换法, 可以简便快速地研究各种非稳态黑洞的热效应, 而且能用来研究各种形状的非稳态黑洞, 甚至那些表面各点温度不同的非平衡黑洞. 最近我们在研究动态黑洞的量子热效应的一系列工作[270–283]中, 进一步发展并完善了这一方法, 使之形成了一个完整的体系, 不仅可以适用于讨论任何动态黑洞的Hawking效应, 而且完全可以用于研究任意自旋粒子在各种黑洞中的Hawking 辐射.

本文后面几章的内容主要是介绍广义乌龟坐标变换法在研究动态黑洞的量子热效应中的应用. 我们发现在球对称动态黑洞中高自旋粒子的Hawking辐射在超前的Eddington-Finkelstein(EF)坐标系中是不对称的[275–278], 而且严格证

明这类黑洞不存在任何新的量子能层效应. 对于动态Kerr(-Newman) 黑洞, 我们证明有新的量子效应— 自旋-转动耦合效应[270-274]. 类似地, 对于任意加速的Kinnersley黑洞, 我们表明有自旋-加速耦合效应存在[283], 该效应中黑洞的加速是由角向形变引起. 在我们讨论这些问题之前, 先简要地回顾一下动态黑洞的一些有关基本知识, 然后重点介绍在研究动态黑洞量子热效应中赵峥等对Damour-Ruffini-Sannan (DRS)方法的推广, 即他们建议的广义乌龟坐标变换法(GTCT).

§5.2 黑洞与视界

在相对论中黑洞被定义为光信号不能跑出去的时空区域. Penrose和Hawking [284, 285]等用整体微分几何给出了一个严格的黑洞定义, 可称为黑洞的"整体定义"或"几何定义":

> 光信号不能传播到类光无穷远的时空区, 称为黑洞. 黑洞的边界称为事件视界.

上述定义是目前认为最严格的黑洞定义. 然而此定义很难用于黑洞物理性质的研究, 原因是这个定义太数学化(太理想化)了, 在天体物理学的研究中难以应用.

不过, 依据上述定义不难看出, 作为黑洞边界的事件视界是一张零曲面, 而且是一张具有该时空对称性的零曲面. 例如, 对于稳态时空, 作为视界的零曲面不应随时间变化. 对于轴对称时空, 视界应该是轴对称的. 这就区分了作为视界的零曲面与其它非视界的零曲面(如光波的波前). 因此我们应用零曲面方程和稳态时空的对称性, 可以定义稳态时空中的视界. 视界包围的区域就是黑洞, 任何信号都不能从那里逃到视界之外.

黑洞最基本的特征是"黑", 而"黑"与"热"是有必然联系的. 黑洞最根本的性质是它的热辐射, 是Hawking — Unruh效应. 赵峥等[51]已经证明了, 只要有视界, 而且它的表面引力κ大于零, 就一定有热辐射自视界产生, 其温度正比于κ. 可见, 热辐射是黑洞最普遍、最本质的属性, 这种属性是与黑洞的"黑"相一致的. 所谓"黑", 就是无光, 即失去信息. 热辐射(黑体辐射)是含信息最少的辐射. 通过热辐射, 我们除去知道辐射源的温度外, 几乎得不到其它信息.

博士学位论文
DOCTORAL DISSERTATION

从以上分析可以看出, 黑洞和视界最主要的特征有两点:

(1) 作为黑洞边界的事件视界是零曲面, 是保有时空内禀对称性的零曲面.

(2) 黑洞产生量子热辐射(Hawking-Unruh效应), 因而具有温度.

依据以上两点, 赵峥[51]对黑洞和视界给出了一个不同于上面的"整体定义"的新定义:

保有时空内禀对称性且产生量子热效应的零超曲面, 称为局域视界. 此边界所包围的、热辐射来源方向的时空区称为黑洞.

此定义可称为黑洞和视界的"局域定义"或"物理定义". 这个定义的范围比"整体定义"更宽, 包含了所有"整体定义"的黑洞和视界, 而且还包含那些使用整体定义比较困难的情况, 例如Rindler时空和一些动态时空等.

黑洞的几何定义在数学上比较严密, 而它的物理定义更好地表达了黑洞的物理特征, 使用起来更方便, 更切合实际.

非稳态(动态)黑洞处在不断变化中, 它的温度在变化, 而且表面各点的温度未必相同. 以前关于稳态黑洞表面引力κ是常数的论断, 是针对于渐近平直时空中的稳态黑洞而言的, 对动态黑洞则无效.

动态黑洞虽然在变化, 但仍应保持这两点基本特征:

(1) 其表面(事件视界)是保有时空内禀对称性的零超曲面.

(2) 应有热辐射从它的表面产生.

与稳态黑洞不同的是, 动态黑洞视界位置、形状和表面温度会随时间变化, 表面各点温度还有可能不同. 抓住了这些特征, 就可以迅速判断任何一个动态时空中是否有事件视界, 它的位置在何处, 以它为表面的黑洞是否产生热辐射, 温度是多少, 以及如何变化等等.

§5.3 动态时空的事件视界

一般来说, 黑洞存在三个“类视界曲面”: 事件视界, 表观视界和类时极限面(无限红移面). 对于一般的非球对称的动态黑洞, 这三个特征曲面是互不重合的.

1. 事件视界

没有任何信息能够到达类光无穷远的时空区, 称为黑洞区(即黑洞内部). 黑洞的边界, 即黑洞区与信息可到达类光无穷远的普通时空区之间的边界, 称为事件视界(event horizon) [78, 285, 286].

这个整体微分几何给事件视界下的严格定义在弯曲时空量子场论的研究中不好使用. 通常, 人们把事件视界看作“保有时空内禀对称性的零超曲面”, 或者说其母线线汇的切矢场是类光Killing矢量场的“零超曲面”, 即它的法矢量类光:

$$n^\mu n_\mu = 0\,, \tag{5.3.1}$$

且母线线汇的切矢场为Killing矢量场:

$$l_{\mu;\nu} + l_{\nu;\mu} = 0\,. \tag{5.3.2}$$

实际上, (5.3.1)式只是事件视界的必要条件而非充分条件. 也就是说, 事件视界一定是零曲面, 零曲面不一定都是事件视界. 我们可称满足(5.3.1) 与(5.3.2)的视界为“局部事件视界”(local event horizon). 通常, 人们用(5.3.1)式来寻找事件视界.

2. 表观视界

表面视界(apparent horizon)定义为陷获区的最外边界面, 或者说, 对于出射光子的最外陷获面[78, 284]. 在稳态时空中, 表观视界总是与事件视界重合.

表观视界由类光测地线汇的膨胀(expansion)来定义. 膨胀ϑ定义为$\vartheta = l^\mu_{;\mu} - \kappa$, 其中$\kappa = n^\mu l^\nu l_{\mu;\nu}$, 在稳态情况下, 它就是黑洞的表面引力. n^μ和l^μ为零标架, 满足

$$l^\mu l_\mu = n^\mu n_\mu = 0\,, \qquad l^\mu n_\mu = 1\,.$$

表观视界由$\vartheta = 0$来定义, 即由表观视界出发的两族类光测地线汇的膨胀都是零.

3. 类时极限面

对于稳态时空, 类时极限面(TLS)定义为以类时Killing矢量$(\partial/\partial t)^a$为母线的三维超曲面在$(\partial/\partial t)^a$趋于类光时的极限面, 即满足$g_{tt} = 0$的三维超曲面. 对于动

态黑洞, 类时极限面满足$g_{vv}=0$, 其中$v=t+r_*$为超前EF坐标.

在动态时空的上述三类特征面中, 最困难的事情是确定其事件视界. 通常的方法是采用York的"工作定义" [287]. York认为, 事件视界是光子的粘着面, 不允许光子从这里逃向远方. 把辐射量$L=-dM/dv$看作为小量时, 在一级近似下: 1) 事件视界应严格类光; 2) 光子应长时间滞留在事件视界上. 这就是说, 事件视界由条件

$$\dot{r}_{\rm EH}\approx 0\,,\qquad\qquad \ddot{r}_{\rm EH}\approx 0 \tag{5.3.3}$$

来确定. 具体计算时, 需采用逐次逼近法求事件视界. 但是这个方法只能近似地确定动态黑洞的事件视界位置.

赵峥建议了一种新的能够准确确定事件视界的一般方法, 可用于各种动态黑洞. 这个方法的指导思想是: 在动态时空中, 事件视界仍应是保持时空内禀对称性的零超曲面, 所以仍应从零曲面方程出发来确定事件视界. 以Vaidya黑洞为例, 其线元为

$$ds^2=2Gdv^2-2dvdr-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2) \tag{5.3.4}$$

其中$2G=1-2M(v)/r$. 线元(5.3.4)是Einstein场方程的一个严格解, 可以用来描述存在辐射的动态球对称黑洞.

由于时空的球对称性, 视界面作为特征曲面也应该是球对称的, 即与θ和φ无关, 所以在这一时空中, 零曲面方程: $g^{\mu\nu}\partial_\mu F\partial_\nu F=0$可写成为

$$2\partial_r F\partial_v F+2G(\partial_r F)^2+\frac{1}{r^2}(\partial_\theta F)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}(\partial_\varphi F)^2=0\,. \tag{5.3.5}$$

另一方面, 零超曲面$F=F(r,v)=0$可写成$r=r(v)$, 所以我们有

$$\frac{dr}{dv}\partial_r F+\partial_v F=0\,. \tag{5.3.6}$$

将(5.3.6)代入(5.3.5)式可得

$$2\frac{dr}{dv}=2G=1-\frac{2M(v)}{r}\,. \tag{5.3.7}$$

Vaidya时空中的事件视界就是满足(5.3.7)式即

$$2r_{H,v}=2G(r_H)=1-2M(v)/r_H \tag{5.3.8}$$

的曲面$r = r_H = 2M/(1-2r_{H,v})$, 其中$r_{H,v} = dr_H/dv = \partial_v r_H = \partial r/\partial v|_{r=r_H}$. 当黑洞随时间变化不快时, 它与用流行的辐射反作用(计算重整化能动张量)法得到的结果一致.

以后我们会看到这一结果可用广义乌龟坐标变换法通过不同途径得到, 而且这种方法适用于一切动态黑洞.

§5.4 广义乌龟坐标变换法

动态黑洞热辐射的研究是一个比较困难的事情. 在赵峥等人建议的广义乌龟坐标变换法(GTCT)出现之前, 国际上比较流行的方法主要是采用辐射反作用法, 即先算出重整化能动张量的真空平均值, 然后计算黑洞的入射负能流, 最后定出其辐射温度[288, 289]. 这个方法仅限于处理渐近平直的球对称动态黑洞, 而且结果不够精确.

在研究动态黑洞Hawking辐射的各种方法中, 广义乌龟坐标变换法(GTCT)是使用较广并且行之有效的一种局部分析方法. 该方法最初由Damour和Ruffini [182] 提出并用于处理静态黑洞和稳态黑洞中标量场的量子热效应. 后来Sannan [206] 进一步发展了这一方法, 使之不仅能适用于标量场情形, 而且可以处理Fermi子的热辐射. 赵峥等[51, 290, 291]则将静态和稳态情形下的乌龟坐标变换推广到非静态和非稳态情形, 对各种类型黑洞中的标量场和非静态球对称黑洞中Dirac粒子的量子热效应作了大量的探讨.

现在我们来介绍赵峥等最初提出的广义乌龟坐标变换法. 从上一章中我们已经知道DRS方法是研究黑洞热辐射的较有力方法. 此方法导出黑洞热辐射谱的关键点在于, 在乌龟坐标r_*变换下, 粒子的动力学方程(例如Klein-Gordon方程、Dirac方程等) 的径向部分在稳态时空(黑洞)的事件视界附近都会化成波动方程的标准形式

$$\frac{\partial^2}{\partial {r_*}^2}\Psi - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi = 0\,, \tag{5.4.1}$$

或用超前的Eddington-Finkelstein坐标v表示为

$$\frac{\partial^2}{\partial {r_*}^2}\Psi + 2\frac{\partial^2}{\partial v \partial r_*}\Psi = 0\,. \tag{5.4.2}$$

从这个方程可得到入射波解和出射波解, 其中出射波在视界上不解析, 可通过下

博士学位论文
DOCTORAL DISSERTATION

半复r-平面解析延拓到视界内, 再用Feynman的散射理论就可证明黑洞存在热辐射, 并最终算出辐射谱为黑体谱和给出黑洞的温度.

黑洞最基本的特征是, 除去总质量、总电荷和总角动量之外, 没有任何信息可以逃离它. 这样的星体, 只能是黑体, 射出的只能是具有Planck谱的平衡热辐射. 动态黑洞应该保留黑洞的热性质这一特点, 应该有平衡热辐射从它射出, 只不过温度随时间变化. 粒子动力学方程也应在乌龟坐标变换下, 在视界附近化成波动方程的标准形式.

在稳态情况下, 我们可以先用零曲面条件定出黑洞的视界位置r_H和计算出表面引力κ_H, 并构造乌龟坐标

$$r_* = r + \frac{1}{2\kappa_H}\ln\left|\frac{r-r_H}{r_H}\right|, \tag{5.4.3}$$

再把它代入粒子的动力学方程使之化成波动方程的标准形式(5.4.2). 对于动态黑洞, 其视界位置r_H随时间变化, 它的表面引力不代表温度. 代表"温度"的参量κ_H("类表面引力")是未知的, 很难求出. 因此可以说, 研究动态黑洞热效应的主要困难就在于求κ_H. 如果不知道κ_H, 就无法构造乌龟坐标, 也就无法把粒子的动力学方程在视界附近化成(5.4.2)的形式.

赵峥提出解决这一困难的思想是可以反过来作处理. 稳态或动态黑洞既然有热性质, 就应有热辐射, 在正确的乌龟坐标下, 粒子动力学方程就应在视界附近化成波动方程的标准形式(5.4.2). 具体作法是, 把r_H与κ_H作为未知参量引入乌龟坐标, 并要求粒子动力学方程在视界附近化成(5.4.2)的形式, 从而自动定出r_H与κ_H的值, 并求出热辐射谱. 这样定出的r_H与由零曲面条件得出的完全一致. 类似地, 这样定出的κ_H也与计算表面引力得到的一样.

以Vaidya黑洞为例, 我们把κ_H作为一个待定的参数, r_H作为v的一个待定函数, 来构造乌龟坐标r_*和v_*

$$r_* = r + \frac{1}{2\kappa_H(v_0)}\ln\left|\frac{r-r_H(v)}{r_H(v_0)}\right|, \qquad v_* = v - v_0\,, \tag{5.4.4}$$

式中v描述粒子逃离视界或趋向视界的运动, 固定时刻v_0为粒子脱离事件视界面的时刻. 粒子脱离视界后, 粒子与黑洞各自独立演化, 不再相互影响. 注意上式中的r_H与κ_H都是未知的. 事件视界$r_H(v)$是v的函数, 在乌龟坐标变换下要变; 而$r_H(v_0)$和$\kappa_H(v_0)$都是粒子脱离视界时刻的值, 虽然它们是未知数, 但不是v或r的函数, 在乌龟坐标变换下它们保持不变, 都是常数.

对乌龟坐标(5.4.4)进行微分, 可得微分算符之间的变换关系式, 具体见附录B. 在作了这些变换后, 在视界附近Klein-Gordon方程和Dirac方程等都可化成波动方程的标准形式

$$\frac{\partial^2}{\partial {r_*}^2}\Psi + 2\frac{\partial^2}{\partial v_* \partial r_*}\Psi = 0\,. \tag{5.4.5}$$

最近我们指出, 对于高自旋的粒子, 只有同时考虑一阶方程和二阶方程才是完全自洽的[270, 271, 282].

赵峥等[51]用共形平直技术证明了粒子动力学方程之所以能化成(5.4.1) 的形式, 原因在于二维时空(t, r_*)在事件视界附近总是显式共形于二维Minkowski 时空. 此方法是基于以下物理考虑而提出的. 在一般稳态时空的视界附近, Klein-Gordon方程都能在乌龟坐标变换下化成平直时空中无质量粒子波动方程的标准形式, 而且总可以利用这一结果证明来自黑洞的辐射具有Planck谱. 因此完全可以推测, 在作热辐射的动态黑洞视界附近, Klein-Gordon方程也能化成平直时空中的形式. 用这一方法可简捷地计算出动态黑洞的视界位置和辐射温度, 其一级近似与前人的结果一致. 而采用York的事件视界的工作定义和用计算能动张量真空平均值的方法只能求得动态黑洞视界位置的一级近似.

赵峥指出, 具有有限温度的静态或稳态黑洞时空, 在乌龟坐标变换下其二维线元一定能在视界附近显式共形于Minkowski时空, 这是在乌龟坐标变换下Klein-Gordon方程在视界附近一定能化成平直时空波动方程的标准形式的根本原因. 动态时空与此类似. 如果采用前人算出的动态黑洞视界位置和温度的一级近似, 容易证明在乌龟坐标变换下动态时空的二维线元在视界附近确实显式共形于Minkowski时空. 如果在乌龟坐标变换下令动态时空的二维线元在视界附近显式共形于Minkowski时空, 就可简单而准确地算出视界的位置和温度. 用共形平直法可以直接算出动态黑洞的视界位置和温度的精确值. 这种技术原则上可用于一切动态黑洞时空, 但只是对于球对称动态黑洞才较为简捷.

由于共形平直技术的核心仍旧是要引入乌龟坐标变换, 因此我们可以认为这个方法实际上还是广义乌龟坐标变换法. 广义乌龟坐标变换法自提出之后, 已被应用于对各种类型黑洞中的标量场和非静态球对称黑洞中Dirac粒子的Hawking蒸发的研究, 获得了很大的成功. 但是这一方法用于处理轴对称动态Kerr黑洞或非静态非球对称的Kinnersley 黑洞等一般时空中Dirac粒子的Hawking辐射时, 则遇到了较大的困难, 原因在于对于一般时空中的Dirac方程不能直接事先进行分离变量处理.


博士学位论文
DOCTORAL DISSERTATION

最近, 我们利用广义乌龟坐标变换法成功地处理了各种动态黑洞中Dirac粒子等高自旋粒子的Hawking辐射[270–283]. 我们克服这一困难的方案是对一阶方程和二阶方程同时作GTCT处理, 然后利用一阶导数之间的关系式去消去二阶方程中的一阶导数交叉项, 使得作了乌龟坐标变换后的每一个分量满足的二阶方程在视界附近都是一个可分离变量的单一分量的标准波动方程. 在文献[270, 271]中, 我们首先解决了动态Kerr黑洞中Dirac粒子的Hawking辐射, 发现动态Kerr黑洞有新的量子效应— 自旋-转动耦合效应. 这一效应在我们进一步考虑光子(自旋为1)的Hawking 辐射时进一步得到了证实[272, 273]; 对于动态Kerr-Newman黑洞, 除了与通常对应的Coulomb相互作用能和转动能外, 也存在这一类自旋-转动耦合效应[274]. 在文献[275–277]中, 我们用广义乌龟坐标变换法重新考察了动态球对称黑洞中Dirac粒子的Hawking辐射, 发现对于自旋1/2粒子的不同分量, 其Hawking 辐射是不对称的. 这一结论对于光子等高自旋粒子来说也是成立的[278]. 另外我们用了不同的处理方法证明不存在与粒子质量有关的所谓新的量子能层效应[276, 277]. 在文章[279–282]中, 广义乌龟坐标变换法也用于处理变加速直线运动Kinnersley黑洞中自旋粒子的Hawking辐射; 对于作任意加速运动的Kinnersley 黑洞, 我们证明Dirac粒子的Hawking辐射谱中存在有自旋与角向形变加速耦合的效应[283], 而对于直线加速情形则没有这类效应[279–282].

这些研究表明了广义乌龟坐标变换法是讨论黑洞辐射的一个强有力的工具. 我们的这些工作进一步完善了乌龟坐标变换论, 标志着广义乌龟坐标变换法已经形成了一个比较完整的体系. 需要注意的是, 这个方法的特点是对视界面逐点进行局部分析, 其基本任务是要确定黑洞的局部事件视界面方程、计算黑洞的表面引力和导出粒子的热辐射谱. 由此可见, 用我们进一步发展的广义乌龟坐标变换法, 不仅可以讨论非静态非球对称任意加速Kinnersley黑洞中自旋为1/2粒子的Hawking蒸发, 以及动态轴对称黑洞中Dirac粒子的Hawking辐射, 而且原则上完全可以用它去讨论具有非退化视界的任意时空的量子热效应, 这一方法也易于推广去讨论任意自旋粒子的Hawking效应[282].

本文的主要工作是进一步发展这一研究动态黑洞的Hawking辐射的有效工具— 广义乌龟坐标变换法, 并用以考察动态黑洞的量子热效应. 在后面的几章中, 我们将依次考察Vaidya-型黑洞、动态Kerr黑洞以及Kinnersley黑洞的量子热效应, 主要是研究这些黑洞中Dirac粒子的Hawking蒸发.

第六章 动态球对称黑洞的量子热效应

"If that is the case, the law of interaction between the particles is apparently asymmetric with respect to interchange of past and future, in spite of their origin in general relativity."
D. Finkelstein, 1958

§6.1 标量粒子的Hawking效应

自从广义乌龟坐标变换法(GTCT)提出后，人们已用这一方法对动态球对称黑洞— Vaidya-型黑洞的量子热效应进行了大量研究[292–309]. 其中以对标量粒子(介子)的Hawking辐射的研究最为成熟. 对旋量粒子(电子、中微子) 的热辐射，起先人们集中在考虑Dirac旋量的$p = 1/2$自旋态上. 最近关于Dirac粒子$p = -1/2$自旋态的Hawking辐射引起了人们较大的兴趣[310–316]. 我们新近的工作[275–278]表明，只有同时考虑Dirac方程的一阶形式和二阶形式才是完全自洽的，而且还发现在超前EF坐标系中，并不是所有的Dirac分量都参与Hawking过程，即对于高自旋粒子的不同分量Hawking辐射是不对称的. 因而我们的研究纠正了前人因忽略了对一阶方程的处理而导致的不正确结论. 同样的处理和结论对于光子的Hawking辐射也完全成立.

在超前的Eddington-Finkelstein(EF)坐标系中，动态球对称黑洞的线元可写为

$$ds^2 = 2dv(Gdv - dr) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\,, \tag{6.1.1}$$

其中$2G = 1 - 2M/r - \Lambda r^2/3$, 黑洞质量$M$是超前时间$v$的函数, Λ为宇宙学常数.

在Vaidya-型时空中, Klein-Gordon方程: $(\Box + \mu_0^2)\Phi = 0$的明显表达式为

$$\big[2r^2\partial_{vr}^2 + \partial_r(2r^2G\partial_r) + 2r\partial_v + \partial_\theta^2 + \cot\theta\partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 - \mu_0^2 r^2\big]\Phi = 0\,. \tag{6.1.2}$$

在分离变量$\Phi = R(v,r)Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$后, 角向部分为通常的球谐函数, 而径向方程成为:

$$\left[2r^2(\partial^2_{vr} + G\partial^2_r) + (4rG + 2r^2G_{,r})\partial_r + 2r\partial_v - \ell(\ell+1) - \mu_0^2 r^2\right]R = 0\,, \qquad (6.1.3)$$

式中μ_0为粒子的静质量, ℓ为粒子的轨道角动量量子数.

引入广义乌龟坐标

$$r_* = r + \frac{1}{2\kappa}\ln[r - r_H(v)]\,, \qquad v_* = v - v_0\,, \qquad (6.1.4)$$

式中$r_H = r_H(v)$为黑洞的事件视界, $\kappa = \kappa(v_0)$为待定的可调节参数. 在乌龟坐标变换下, v_0与κ均是常数.

在乌龟坐标变换(6.1.4)下, 方程(6.1.3)在乘以$2\kappa(r - r_H)$并取$r \to r_H(v_0)$和$v \to v_0$极限后变成

$$\begin{aligned}&\left[\frac{A}{2\kappa} + 4G(r_H) - 2r_{H,v}\right]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}R + 2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}R \\ &\quad + \left[-A + 2G_{,r}(r_H) + \frac{4G(r_H) - 2r_{H,v}}{r_H}\right]\frac{\partial}{\partial r_*}R = 0\,. \qquad (6.1.5)\end{aligned}$$

从上一章中导出的视界面方程: $2G(r_H) = 2r_{H,v}$, 可知上式中的系数A是一个0/0-型不定式, 用L' Hôspital法则可求得其结果为

$$A = \lim_{\substack{r\to r_H\\ v\to v_0}} \frac{2(G - r_{H,v})}{r - r_H} = 2G_{,r}(r_H)\,. \qquad (6.1.6)$$

将系数A代入(6.1.5), 并利用视界面方程$2G(r_H) = 2r_{H,v}$可得到

$$\left[\frac{G_{,r}(r_H)}{\kappa} + 2G(r_H)\right]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}R + 2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}R + \frac{2G(r_H)}{r_H}\frac{\partial}{\partial r_*}R = 0\,. \qquad (6.1.7)$$

调节方程(6.1.7)中二阶导数项的系数使其比例为$1:2$, 即令

$$\frac{G_{,r}(r_H)}{\kappa} + 2G(r_H) \equiv 1\,,$$

可以得出视界的表面引力(温度)为

$$\kappa = \frac{G_{,r}(r_H)}{1 - 2G(r_H)} = \frac{G_{,r}(r_H)}{1 - 2r_{H,v}}\,. \qquad (6.1.8)$$

与此同时, 在这样选取了待定系数κ后, 可使方程(6.1.7)在视界附近化成波动方程的标准形式

$$\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}R + 2\frac{\partial^2}{\partial r_* \partial v_*}R + 2C_0\frac{\partial}{\partial r_*}R = 0\,, \tag{6.1.9}$$

其中$C_0 = G(r_H)/r_H = r_{H,v}/r_H$.

事实上如果我们事先不对Φ作分离变量处理, 而是直接对方程(6.1.2) 作类似的GTCT处理, 考虑到其角向部分为球谐函数, 再作分离变量$\Phi(v_*, r_*) = R(v_*, r_*)Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$后, 同样可得到波函数$\Phi$满足的视界附近的标准形式的波动方程(6.1.9).

方程(6.1.9)中一阶导数$\frac{\partial}{\partial r_*}R$项的系数$C_0$为一个阻尼因子, 这一点容易从下面的讨论中可以看出. 如果我们对径向方程(6.1.3)作变量代换$R(v,r) = r^{-1}\rho(v,r)$, 则可得到

$$\left[2r^2(\partial_{vr}^2 + G\partial_r^2 + G_{,r}\partial_r) - 2rG_{,r} - \ell(\ell+1) - \mu_0^2 r^2\right]\rho = 0\,. \tag{6.1.10}$$

方程(6.1.10)在作乌龟坐标变换(6.1.4)并取趋近于视界的极限后成为

$$\begin{aligned}\left\{\frac{\widetilde{A}}{2\kappa} + r_H^2[4G(r_H) - 2r_{H,v}]\right\}\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}\rho + 2r_H^2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}\rho \\ +\left[-\widetilde{A} + 2r_H^2 G_{,r}(r_H)\right]\frac{\partial}{\partial r_*}\rho = 0\,,\end{aligned} \tag{6.1.11}$$

其中系数$\widetilde{A}$为不定式, 其结果为

$$\widetilde{A} = \lim_{\substack{r\to r_H\\ v\to v_0}} \frac{2r^2(G - r_{H,v})}{r - r_H} = 2r_H^2 G_{,r}(r_H) = r_H^2 A\,.$$

调节参数κ可使方程(6.1.11)在视界附近化成标准形式的波动方程

$$\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}\rho + 2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}\rho = 0\,. \tag{6.1.12}$$

因此方程(6.1.9)与(6.1.12)仅相差一个阻尼因子项, 而它可通过变量代换消去.

方程(6.1.9)经分离变量$R(v_*, r_*) = R(r_*)e^{-i\omega v_*}$后变成

$$R'' = 2(i\omega - C_0)R'\,, \tag{6.1.13}$$

可得其入射波解和出射波解分别为

$$\begin{aligned}R^{\rm in} &= e^{-i\omega v_*}\,,\\ R^{\rm out}(r > r_H) &= e^{-i\omega v_*}e^{2(i\omega - C_0)r_*}\,.\end{aligned} \tag{6.1.14}$$


博士学位论文
DOCTORAL DISSERTATION

因为在视界附近有$r_* \sim \frac{1}{2\kappa}\ln(r-r_H)$, 所以入射波解是正则的, 而出射波解在视界$r=r_H$上是不解析的, 但是我们可以通过下半复$r$-平面

$$(r-r_H) \longrightarrow (r_H-r)e^{-i\pi}$$

把它解析延拓到黑洞内部为

$$\begin{aligned}\widetilde{R^{\rm out}}(r<r_H) &= e^{-i\omega v_*}e^{2(i\omega-C_0)r_*}e^{i\pi C_0/\kappa}e^{\pi\omega/\kappa}\\ &= R^{\rm out}(r>r_H)e^{i\pi C_0/\kappa}e^{\pi\omega/\kappa}\,.\end{aligned} \tag{6.1.15}$$

于是出射波在视界上的相对散射几率为

$$\left|\frac{R^{\rm out}}{\widetilde{R^{\rm out}}}\right|^2 = e^{-2\pi\omega/\kappa}\,. \tag{6.1.16}$$

按照Damour-Ruffini-Sannan建议的DRS方法, 容易求出标量粒子从黑洞事件视界发射的热辐射Bose谱为

$$\langle\mathcal{N}_\omega\rangle \simeq \frac{1}{e^{\omega/T_H}-1}\,, \tag{6.1.17}$$

其中Hawking温度为

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{4\pi r_H}\cdot\frac{Mr_H-\Lambda r_H^4/3}{Mr_H-\Lambda r_H^4/6}\,. \tag{6.1.18}$$

(6.1.17)式即为Planck黑体辐射的Bose谱. 此式中的温度κ是v_0的函数, 随时间而变化. v_0为辐射粒子脱离黑洞表面的时刻, 它描述黑洞的演化, 而v描述脱离黑洞后辐射粒子的运动.

事实上可以不利用零曲面方程, 而直接要求方程(6.1.5)或(6.1.11)在视界附近化成波动方程的标准形式, 即要求二阶导数$\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}$与$\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}$的系数比在$r\to r_H(v_0)$和$v\to v_0$时趋于$1:2$, 就可以同时定出$r_H$与$\kappa$. 由于系数$A$或$\widetilde{A}$是一个不定式, 其分母在$r\to r_H(v_0)$, $v\to v_0$时趋于零, 必然要求其分子也同时趋于零, 这就给出视界面方程, 从而定出事件视界r_H的位置. 由于要使二阶导数项的系数比为$1:2$, 这就要求适当调节参数κ, 即定出黑洞温度$T_H=\kappa/(2\pi)$的值.

另外, 如果把广义乌龟坐标变换法应用于零超曲面$F(v,r)=0$满足的方程$g^{\mu\nu}\partial_\mu F\partial_\nu F=0$,

$$2\partial_r F\partial_v F + 2G(\partial_r F)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta F)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}(\partial_\varphi F)^2 = 0\,, \tag{6.1.19}$$

可得出

$$\left[2G(r_H) - 2r_{H,v}\right]\left(\frac{\partial}{\partial r_*}F\right)^2 = 0\,, \tag{6.1.20}$$

由于零超曲面有非平凡解的条件是方程(6.1.20)方括号中的系数为零, 这就给出视界面方程

$$2G(r_H) - 2r_{H,v} = 0\,. \tag{6.1.21}$$

在后面的章节中, 我们将会看到用广义乌龟坐标变换法, 可以而且应该能从另外不同的途径导出视界面的方程(6.1.21).

从(6.1.21)和(6.1.8)式可以看出Vaidya-型黑洞的半径r_H和温度$T_H = \kappa/(2\pi)$都随时间变化, 但在任何一个确定的时刻v_0, 黑洞表面各点的温度都是相同的. Vaidya-型黑洞在演化过程中, 始终保持球对称性, 不仅其形状为球形, 而且温度也是球对称的, 与方位角θ和φ无关. 当Vaidya黑洞不随时间变化, 即它退化为Schwarzschild黑洞时, 其视界半径和温度的表达式都回到是常数的情况.

§6.2 不对称的Hawking辐射(一) — 旋量粒子

本节利用广义乌龟坐标变换法(GTCT)考察Vaidya-型球对称黑洞中Dirac粒子的Hawking 辐射. 我们同时考虑Dirac方程的一阶形式和二阶形式在视界附近的极限形式, 因为Dirac旋量应该同时满足它们. 从前者可以得到视界面方程, 而从后者可以导出Hawking 辐射温度和电子的热辐射谱. 我们严格证明Hawking辐射对于Dirac旋量的(P_1, Q_2) 分量是不存在的, 而(P_2, Q_1)分量参与Hawking过程. 这种不同旋量分量的Hawking 辐射的不对称性的起源可能来自于在超前EF坐标系中时空的过去-未来不对称性[317].

如果忽略反作用的话, 自旋为1/2、质量为μ_0粒子的动力学行为由四个耦合的Chandrasekhar-Dirac方程[5]描述, 其旋量形式在Newman-Penrose表述中可写为

$$\begin{aligned}
(D + \epsilon - \rho)F_1 + (\overline{\delta} + \tilde{\pi} - \alpha)F_2 &= \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}G_1\,,\\
(\Delta + \mu - \gamma)F_2 + (\delta + \beta - \tau)F_1 &= \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}G_2\,,\\
(D + \epsilon^* - \rho^*)G_2 - (\delta + \tilde{\pi}^* - \alpha^*)G_1 &= \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}F_2\,,\\
(\Delta + \mu^* - \gamma^*)G_1 - (\overline{\delta} + \beta^* - \tau^*)G_2 &= \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}F_1\,.
\end{aligned} \tag{6.2.1}$$

博士学位论文
DOCTORAL DISSERTATION

为了在Vaidya-型时空(6.1.1)中写出Dirac方程的明显表达式, 我们建立一个复零标架$\{\mathbf{l},\mathbf{n},\mathbf{m},\overline{\mathbf{m}}\}$使它们满足正交条件$\mathbf{l}\cdot\mathbf{n}=-\mathbf{m}\cdot\overline{\mathbf{m}}=1$. 我们选择协变的1-形式基为

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= dv\,, & \mathbf{m} &= \frac{-r}{\sqrt{2}}(d\theta + i\sin\theta d\varphi)\,, \\ \mathbf{n} &= Gdv - dr\,, & \overline{\mathbf{m}} &= \frac{-r}{\sqrt{2}}(d\theta - i\sin\theta d\varphi)\,, \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

相应的方向导数为

$$\begin{aligned} D &= -\partial_r\,, & \delta &= \frac{1}{\sqrt{2}r}(\partial_\theta + \frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi)\,, \\ \Delta &= \partial_v + G\partial_r\,, & \overline{\delta} &= \frac{1}{\sqrt{2}r}(\partial_\theta - \frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi)\,. \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

不难求出在上述零标架中不为零的Newman-Penrose(NP)旋系数为

$$\rho = \frac{1}{r}\,,\ \ \mu = \frac{G}{r}\,,\ \ \gamma = -\frac{G_{,r}}{2} = -\frac{dG}{2dr}\,,\ \ \beta = -\alpha = \frac{\cot\theta}{2\sqrt{2}r}\,. \tag{6.2.4}$$

将所需的NP旋系数插入方程(6.2.1)后, 我们得到

$$\begin{aligned} -(\partial_r + \frac{1}{r})F_1 + \frac{1}{\sqrt{2}r}\mathcal{L}_{1/2}F_2 &= \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}G_1\,, \\ \frac{1}{2r^2}\mathcal{D}F_2 + \frac{1}{\sqrt{2}r}\mathcal{L}^{\dagger}_{1/2}F_1 &= \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}G_2\,, \\ -(\partial_r + \frac{1}{r})G_2 - \frac{1}{\sqrt{2}r}\mathcal{L}^{\dagger}_{1/2}G_1 &= \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}F_2\,, \\ \frac{1}{2r^2}\mathcal{D}G_1 - \frac{1}{\sqrt{2}r}\mathcal{L}_{1/2}G_2 &= \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}F_1\,, \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

其中我们定义了如下算符:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= 2r^2(\partial_v + G\partial_r) + (r^2G)_{,r}\,, \\ \mathcal{L}_n &= \partial_\theta + n\cot\theta - \frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi\,, \\ \mathcal{L}^{\dagger}_n &= \partial_\theta + n\cot\theta + \frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi\,. \end{aligned}$$

进一步作代换

$$P_1 = \sqrt{2}rF_1\,,\quad P_2 = F_2\,,\qquad Q_1 = G_1\,,\quad Q_2 = \sqrt{2}rG_2$$

后产生方程


博士学位论文
DOCTORAL DISSERTATION

$$-\partial_r P_1 + \mathcal{L}_{1/2} P_2 = i\mu_0 r Q_1\,, \qquad \mathcal{D} P_2 + \mathcal{L}_{1/2}^{\dagger} P_1 = i\mu_0 r Q_2\,,$$
$$-\partial_r Q_2 - \mathcal{L}_{1/2}^{\dagger} Q_1 = i\mu_0 r P_2\,, \qquad \mathcal{D} Q_1 - \mathcal{L}_{1/2} Q_2 = i\mu_0 r P_1\,. \tag{6.2.6}$$

显然将Q_1, Q_2分别与P_2^*, $-P_1^*$等同后, Chandrasekhar-Dirac 方程(6.2.6)仍然可以被满足, 所以只需处理一对分量(P_1, P_2)即可. 现在我们分离变量如下:

$$P_1 = R_1(v,r)S_1(\theta,\varphi)\,, \qquad P_2 = R_2(v,r)S_2(\theta,\varphi)\,,$$
$$Q_1 = R_2(v,r)S_1(\theta,\varphi)\,, \qquad Q_2 = R_1(v,r)S_2(\theta,\varphi)\,,$$

这样就可以将方程(6.2.6)退耦为径向部分

$$\partial_r R_1 = (\lambda - i\mu_0 r)R_2\,, \quad \mathcal{D} R_2 = (\lambda + i\mu_0 r)R_1 \tag{6.2.7}$$

和角向部分

$$\mathcal{L}_{1/2}^{\dagger} S_1 = -\lambda S_2\,, \quad \mathcal{L}_{1/2} S_2 = \lambda S_1\,, \tag{6.2.8}$$

式中$\lambda = \ell + 1/2$是一个分离变量常数. 函数$S_1(\theta,\varphi)$ 和$S_2(\theta,\varphi)$分别是自旋权重$p = \pm 1/2$的旋量球谐函数${}_pY_{\ell m}(\theta,\varphi)$, 它们满足下述方程[187, 190]

$$\Big[\partial_\theta^2 + \cot\theta\partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 + \frac{2ip\cos\theta}{\sin^2\theta}\partial_\varphi$$
$$-p^2\cot^2\theta + p + (\ell - p)(\ell + p + 1)\Big]{}_pY_{\ell m}(\theta,\varphi) = 0\,. \tag{6.2.9}$$

因为角向方程(6.2.8)与黑洞的热辐射没有关系, 所以人们只需对径向方程(6.2.7)在视界附近的行为感兴趣. 由于Vaidya-型黑洞是球对称的, 作为一个工作假设, 可以引入上一节中的广义乌龟坐标变换(6.1.4)如下:

$$r_* = r + \frac{1}{2\kappa}\ln[r - r_H(v)]\,, \qquad v_* = v - v_0\,,$$

其中$r_H = r_H(v)$是事件视界的位置, $\kappa = \kappa(v_0)$是一个可调节的参数, 它在乌龟坐标变换下保持不变. 参数v_0为一个任意常数, 是粒子脱离视界的初始时刻. 量$r_{H,v} = \partial r_H/\partial v$是视界随时间变化的速率, 描述黑洞事件视界随时间的演化, 反映了在事件视界附近存在量子能层.

现在我们考虑方程(6.2.7)中的R_1和R_2在视界附近的渐近行为. 在乌龟坐标变换(6.1.4)下和取$r \to r_H(v_0)$及$v \to v_0$极限后, 方程(6.2.7) 在视界附近的极限形式可以化为

$$\frac{\partial}{\partial r_*}R_1 = 0\,, \qquad 2r_H^2\big[G(r_H) - r_{H,v}\big]\frac{\partial}{\partial r_*}R_2 = 0\,. \tag{6.2.10}$$

从方程(6.2.10)中可以看出R_1与r_*无关, 且在视界面上是正则的. 因为$r_H \neq 0$, R_2存在有一个非平凡解的条件是导数项$\frac{\partial}{\partial r_*}R_2$前的系数为零, 即

$$2G(r_H) - 2r_{H,v} = 0\,. \tag{6.2.11}$$

这就是决定事件视界位置的方程, 与前一节得到的结果完全一致. 由于r_H 依赖于时间v_0, 事件视界的位置和黑洞的形状随时间变化.

为了考察自旋为1/2粒子的Hawking辐射, 需要考虑Dirac方程的二阶形式在视界附近的行为. 直接计算给出二阶径向方程如下

$$\begin{aligned}\big[2r^2(\partial_{vr}^2 + G\partial_r^2) + (r^2G)_{,r}\partial_r \\ -(\lambda^2 + \mu_0^2 r^2)\big]R_1 = -2i\mu_0 r^2 G R_2\,,\end{aligned} \tag{6.2.12}$$

$$\begin{aligned}\big[2r^2(\partial_{vr}^2 + G\partial_r^2) + 3(r^2G)_{,r}\partial_r + 4r\partial_v \\ -(\lambda^2 + \mu_0^2 r^2) + (r^2G)_{,rr}\big]R_2 = i\mu_0 R_1\,.\end{aligned} \tag{6.2.13}$$

给定广义乌龟坐标变换(6.1.4)并且在取极限$r \to r_H(v_0)$和$v \to v_0$后, 方程(6.2.12)和(6.2.13)的极限形式为

$$\big[\frac{A}{2\kappa} + 2G(r_H)\big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}R_1 + 2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}R_1 = 0\,, \tag{6.2.14}$$

$$\begin{aligned}\big[\frac{A}{2\kappa} + 2G(r_H)\big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}R_2 + 2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}R_2 \\ +\big[-A + 3G_{,r}(r_H) + \frac{2G(r_H)}{r_H}\big]\frac{\partial}{\partial r_*}R_2 = 0\,,\end{aligned} \tag{6.2.15}$$

其中我们用了关系式$2G(r_H) = 2r_{H,v}$和$\frac{\partial}{\partial r_*}R_1 = 0$. 在上节中我们已求得不定式系数$A = 2G_{,r}(r_H)$, 现在调节方程(6.2.14)和(6.2.15)中的系数κ, 令$\kappa = G_{,r}(r_H)/[1 - 2G(r_H)]$使等式

$$\frac{A}{2\kappa} + 2G(r_H) \equiv 1$$

成立, 就可以在视界附近化方程(6.2.14)和(6.2.15)为标准形式的波动方程

$$\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}R_1 + 2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}R_1 = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial r_*}R_1 = 0\,, \tag{6.2.16}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}R_2 + 2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}R_2 + 2C_{1/2}\frac{\partial}{\partial r_*}R_2 = 0\,, \tag{6.2.17}$$

其中系数$C_{1/2}$可视为有限实常数,

$$C_{1/2} = \frac{1}{2}G_{,r}(r_H) + \frac{G(r_H)}{r_H} = \frac{1}{2}G_{,r}(r_H) + \frac{r_{H,v}}{r_H}.$$

从方程(6.2.16)可以知道R_1在视界上是一个常数, 其解为$R_1 = R_{10}e^{-i\omega v_*}$, 它意味着Hawking辐射对于$(P_1, Q_2)$是不存在的. 现在对方程(6.2.17)按$R_2 = R_2(r_*)e^{-i\omega v_*}$的形式分离变量, 可得到

$$R_2'' = 2(i\omega - C_{1/2})R_2', \tag{6.2.18}$$

其一般解为

$$R_2 = R_{21}e^{2(i\omega - C_{1/2})r_*} + R_{20}. \tag{6.2.19}$$

方程(6.2.17)的入射波和出射波分别是

$$R_2^{\text{in}} = e^{-i\omega v_*},$$
$$R_2^{\text{out}}(r > r_H) = e^{-i\omega v_*}e^{2(i\omega - C_{1/2})r_*}. \tag{6.2.20}$$

采用DRS方法, 可以通过下半复r-平面把非正则的出射波$R_2^{\text{out}}(r > r_H)$ 从视界外解析延拓到视界内,

$$\widetilde{R_2^{\text{out}}}(r < r_H) = R_2^{\text{out}}(r > r_H)e^{i\pi C_{1/2}/\kappa}e^{\pi\omega/\kappa}. \tag{6.2.21}$$

于是出射波在视界上的相对散射几率为

$$\left|\frac{R_2^{\text{out}}}{\widetilde{R_2^{\text{out}}}}\right|^2 = e^{-2\pi\omega/\kappa} \tag{6.2.22}$$

和Dirac粒子从黑洞事件视界发射出来的热辐射Fermi谱为

$$\langle \mathcal{N}_\omega \rangle \simeq \frac{1}{e^{\omega/T_H} + 1}, \tag{6.2.23}$$

式中的Hawking温度$T_H = \kappa/(2\pi)$是时间v_0的函数, 随时间而变化.

比较标量粒子的热辐射Bose谱(6.1.17)和电子的热辐射Fermi谱(6.2.23), 我们发现其差别仅在于统计分布的不同, 而这是由于它们遵守不同的自旋统计法则所导致的.

本节研究了Vaidya-型黑洞的Hawking辐射, 导出了与前人一致的视界面方程和Hawking辐射温度. 我们研究了分离变量后的Dirac方程的一阶形式和二阶

形式在视界附近的渐近行为, 发现其一阶方程的极限形式给Hawking辐射加上了很强的限制, 即, 不是所有Dirac旋量分量而仅只有(P_2, Q_1)分量参与热辐射. 这种四分量旋量的Hawking辐射的不对称性可能起源于在超前Eddington-Finkelstein(EF)坐标系中时空的过去-未来不对称性. 这一特点以前没有报到过.

这一节的研究说明, 对于高自旋粒子的Hawking的辐射, 我们需要同时考虑其一阶方程和二阶方程, 只有这样才是自洽的. 如果不考虑到这一点, 就会导出不正确的结果.

§6.3 不对称的Hawking辐射(二) — 光子情形

这一节将考察Vaiday-型黑洞中光子的热辐射, 这里所用的方法与上节完全类似, 即同时考虑Maxwell方程的一阶形式和二阶形式在视界附近的渐近行为, 并把每一个分量满足的二阶方程化为标准形式的波动方程. 研究表明, 光子的热辐射黑体谱与Klein-Gordon标量粒子的完全一样, 但由于一阶Maxwell方程的极限形式对Hawking辐射所加上的限制, 并非所有的复Maxwell标量, 而仅只有Φ_0分量展示热辐射特性. 我们认为Vaidya-型时空中不同场分量的Hawking辐射的不对称性是所有高自旋粒子都具有的一种共性.

当忽略自旋为1的无质量的检测粒子对背景几何的反作用时, 电磁场方程就是在Vaidya- 型时空背景(6.1.1)中的Maxwell方程. 在Newman-Penrose表述中, 无源的Maxwell方程表为[5, 230]

$$
\begin{aligned}
&(D-2\rho)\phi_1-(\bar{\delta}+\bar{\pi}-2\alpha)\phi_0=-\bar{\kappa}\phi_2\,,\\
&(\delta-2\tau)\phi_1-(\Delta+\mu-2\gamma)\phi_0=-\sigma\phi_2\,,\\
&(D+2\epsilon-\rho)\phi_2-(\bar{\delta}+2\bar{\pi})\phi_1=-\tilde{\lambda}\phi_0\,,\\
&(\delta+2\beta-\tau)\phi_2-(\Delta+2\mu)\phi_1=-\nu\phi_0\,.
\end{aligned}
\tag{6.3.1}
$$

利用前一节中建立的零标架, 将所需的旋系数代入方程(6.3.1)后, 可以得到

$$
\begin{aligned}
&(\partial_r + 2/r)\phi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}r}\mathcal{L}_1\phi_0 = 0\,, \\
&(\mathcal{D} + G_{,r} + G/r)\phi_0 - \frac{1}{\sqrt{2}r}\mathcal{L}_0^\dagger\phi_1 = 0\,, \\
&(\partial_r + 1/r)\phi_2 + \frac{1}{\sqrt{2}r}\mathcal{L}_0\phi_1 = 0\,, \\
&(\mathcal{D} + 2G/r)\phi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}r}\mathcal{L}_1^\dagger\phi_2 = 0\,,
\end{aligned}
\tag{6.3.2}
$$

其中算符$\mathcal{L}_n$和$\mathcal{L}_n^\dagger$的定义与上一节一致,但$\mathcal{D}$的定义有所不同,此处为$\mathcal{D} = \partial_v + G\partial_r$.

通过代换

$$
\Phi_0 = r\phi_0\,, \quad \Phi_1 = \sqrt{2}r^2\phi_1\,, \quad \Phi_2 = r\phi_2
$$

可将方程(6.3.2)化为

$$
\begin{aligned}
\partial_r\Phi_1 + \mathcal{L}_1\Phi_0 = 0\,, &\quad 2r^2(\mathcal{D} + G_{,r})\Phi_0 - \mathcal{L}_0^\dagger\Phi_1 = 0\,, \\
2r^2\partial_r\Phi_2 + \mathcal{L}_0\Phi_1 = 0\,, &\quad \mathcal{D}\Phi_1 - \mathcal{L}_1^\dagger\Phi_2 = 0\,.
\end{aligned}
\tag{6.3.3}
$$

再采用分离变量方案

$$
\Phi_0 = R_0(v,r)S_0(\theta,\varphi)\,, \quad \Phi_1 = R_1(v,r)S_1(\theta,\varphi)\,, \quad \Phi_2 = R_2(v,r)S_2(\theta,\varphi)
$$

可将方程(6.3.3)退耦为径向部分

$$
\begin{aligned}
\partial_r R_1 + \lambda R_0 = 0\,, &\quad 2r^2(\mathcal{D} + G_{,r})R_0 + \lambda R_1 = 0\,, \\
2r^2\partial_r R_2 + \lambda R_1 = 0\,, &\quad \mathcal{D}R_1 + \lambda R_2 = 0
\end{aligned}
\tag{6.3.4}
$$

和角向部分

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 S_0 = \lambda S_1\,, &\quad \mathcal{L}_0^\dagger S_1 = -\lambda S_0\,, \\
\mathcal{L}_0 S_1 = \lambda S_2\,, &\quad \mathcal{L}_1^\dagger S_2 = -\lambda S_1\,,
\end{aligned}
\tag{6.3.5}
$$

其中$\lambda = \sqrt{\ell(\ell+1)}$为分离变量常数. 所有函数$S_0(\theta,\varphi)$, $S_1(\theta,\varphi)$和$S_2(\theta,\varphi)$ 分别是自旋权重为$p = 1, 0, -1$的矢量球谐函数${}_pY_{\ell m}(\theta,\varphi)$ [187].

对于Hawking辐射, 我们只需关心径向方程(6.3.4)在视界邻域的渐近行为. 利用先前引入的乌龟坐标变换(6.1.4), 在取$r \to r_H(v_0)$和$v \to v_0$ 的极限后, 方程(6.3.4)在视界附近化为


博士学位论文
DOCTORAL DISSERTATION

$$\frac{\partial}{\partial r_*}R_1 = 0\,,\qquad 2r_H^2(r_{H,v}-G)\frac{\partial}{\partial r_*}R_0 = 0\,,$$
$$2r_H^2\frac{\partial}{\partial r_*}R_2 = 0\,,\qquad (r_{H,v}-G)\frac{\partial}{\partial r_*}R_1 = 0\,. \tag{6.3.6}$$

从方程(6.3.6)可知，$R_1(r_*)$和$R_2(r_*)$在视界上是正则的

$$\frac{\partial}{\partial r_*}R_1 = \frac{\partial}{\partial r_*}R_2 = 0\,. \tag{6.3.7}$$

因此，方程(6.3.6)的一个合理的解是导数$\frac{\partial}{\partial r_*}R_0$不为零，给我们留下的要$R_0$存在一个非平凡解的唯一可能性是(因为$r_H \neq 0$)

$$2G(r_H) - 2r_{H,v} = 0\,, \tag{6.3.8}$$

而这正是以前导出的视界面方程. 这样我们就给出了推导该方程的又一方法. 总之，利用广义乌龟坐标变换法，我们至此已有四种方法导出动态黑洞的事件视界. 这四种方法给出了一致的结果，与用零曲面方程定出的事件视界方程完全符合，这正是我们所预期的结果.

上面从一阶Maxwell方程分离变量后的径向部分的极限形式求出了视界面方程，对其二阶形式采用类似的操作，可以导出Hawking温度和光子的热辐射谱. 直接计算得到二阶径向方程如下:

$$2r^2\big[\partial_{vr}^2 + G\partial_r^2 + 2(G_{,r}+\frac{G}{r})\partial_r\big]R_0 + 4r\partial_v R_0$$
$$+\big(4rG_{,r} + 2r^2G_{,rr} - \lambda^2\big)R_0 = 0\,, \tag{6.3.9}$$
$$2r^2\big(\partial_{vr}^2 + G\partial_r^2 + G_{,r}\partial_r\big)R_1 - \lambda^2 R_1 = 0\,, \tag{6.3.10}$$
$$2r^2\big(\partial_{vr}^2 + G\partial_r^2 + \frac{2G}{r}\partial_r\big)R_2 - \lambda^2 R_2 = 0\,. \tag{6.3.11}$$

采用乌龟坐标变换(6.1.4)并经过冗长计算发现，当$r \to r_H(v_0)$和$v \to v_0$ 时，方程(6.3.9)-(6.3.11)在事件视界$r = r_H$附近有如下极限形式



$$\begin{aligned}
&\Big\{\Big[\frac{A}{2\kappa}+4G(r_H)-2r_{H,v}\Big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}\\
&\qquad+\Big[-A+4G_{,r}(r_H)+\frac{4G(r_H)-4r_{H,v}}{r_H}\Big]\frac{\partial}{\partial r_*}\Big\}R_0\\
&=\Big\{\Big(\frac{A}{2\kappa}+2r_{H,v}\Big)\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}+\Big[-A+4G_{,r}(r_H)\Big]\frac{\partial}{\partial r_*}\Big\}R_0=0\,, \quad (6.3.12)\\
&\Big\{\Big[\frac{A}{2\kappa}+4G(r_H)-2r_{H,v}\Big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}+\big[-A+2G_{,r}(r_H)\big]\frac{\partial}{\partial r_*}\Big\}R_1\\
&=\Big[\Big(\frac{A}{2\kappa}+2r_{H,v}\Big)\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}\Big]R_1=0\,, \quad (6.3.13)\\
&\Big\{\Big[\frac{A}{2\kappa}+4G(r_H)-2r_{H,v}\Big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}+\Big[-A+\frac{4G(r_H)}{r_H}\Big]\frac{\partial}{\partial r_*}\Big\}R_2\\
&=\Big[\Big(\frac{A}{2\kappa}+2r_{H,v}\Big)\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}\Big]R_2=0\,. \quad (6.3.14)
\end{aligned}$$

在上面的计算中，我们已利用了关系式$2G(r_H)=2r_{H,v}$和$\frac{\partial}{\partial r_*}R_1=\frac{\partial}{\partial r_*}R_2=0$. 方程(6.3.12-6.3.14)中的系数$A=2G_{,r}(r_H)$与前两节相同. 与前两节的处理一样，我们可以调节参数κ使方程(6.3.12-6.3.14) 在视界附近化为波动方程的标准形式

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}+2C_1\frac{\partial}{\partial r_*}\Big)R_0=0\,, \quad (6.3.15)$$

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}\Big)\binom{R_1}{R_2}=0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial r_*}\binom{R_1}{R_2}=0\,, \quad (6.3.16)$$

其中$C_1=G_{,r}(r_H)$.

从方程(6.3.16)可知，R_1和R_2在视界处与r_*无关，是一个常数. 其解$(R_1,R_2)\sim e^{-i\omega v_*}$意味着Hawking辐射对于$\Phi_1$和$\Phi_2$是不存在的. 对方程(6.3.15)分离变量$R_0=R_0(r_*)e^{-i\omega v_*}$，可以得到

$$R_0''=2(i\omega-C_1)R_0'\,, \qquad R_0=R_{01}e^{2(i\omega-C_1)r_*}+R_{02}\,. \quad (6.3.17)$$

入射波解和出射波解分别为

$$\begin{aligned}
&R_0^{\rm in}=e^{-i\omega v_*}\,,\\
&R_0^{\rm out}(r>r_H)=e^{-i\omega v_*}e^{2(i\omega-C_1)r_*}\,. \quad (6.3.18)
\end{aligned}$$

按照DRS方法，可将在视界$r=r_H$上非正则的出射波$R_0^{\rm out}(r>r_H)$ 沿下半r-复平面解析延拓到视界内为

博士学位论文
DOCTORAL DISSERTATION

$$\widetilde{R_0^{\rm out}}(r < r_H) = R_0^{\rm out}(r > r_H) e^{i\pi C_1/\kappa} e^{\pi\omega/\kappa}. \tag{6.3.19}$$

出射波在事件视界上的相对散射几率和光子从黑洞事件视界上发射的热辐射Bose谱为

$$\left|\frac{R_0^{\rm out}}{\widetilde{R_0^{\rm out}}}\right|^2 = e^{-2\pi\omega/\kappa}, \qquad \langle\mathcal{N}_\omega\rangle \simeq \frac{1}{e^{\omega/T_H} - 1}. \tag{6.3.20}$$

式中的Hawking温度$T_H = \kappa/(2\pi)$与前面的完全相同.

由于光子遵从Bose-Einstein统计, 热辐射谱(6.3.20)表明黑洞就像黑体一样发射辐射, 可以看到光子和标量粒子的Hawking蒸发有相同的热辐射谱.

这一节的研究表明, 只有同时考虑一阶方程和二阶方程才是完全自洽的. 我们再次发现, 一阶方程的极限形式对Hawking效应加上了很强的限制, 因而不是所有的分量, 而仅只有Φ_0才具有热辐射特征. 这种Maxwell场复标量的不同分量Hawking辐射的非对称性可能来源于在超前Eddington-Finkelstein坐标系中时空的过去-未来不对称性. 我们认为这是高自旋粒子在Vaidya-型球对称黑洞中热辐射的一个共同特征.

§6.4 带电黑洞的Hawking的蒸发

本节用广义乌龟坐标变换法(GTCT)研究带电的球对称黑洞— Vaidya-Bonner-de Sitter 时空中带电的Dirac粒子和复标量场的Hawking效应. 除去自旋统计的不同外, 两者的热辐射谱在形式上是相似的.

在超前Eddington-Finkelstein(EF)坐标系中, Vaidya-Bonner-de Sitter(VBS)黑洞的线元已由(6.1.1)式给出, 只不过是其中的$2G = 1 - 2M/r + Q^2/r^2 - \Lambda r^2/3$, 黑洞质量$M(v)$和电荷$Q(v)$随超前时间$v$变化. VBS度规和电磁势1-形式

$$\mathbf{A} = \frac{Q}{r} dv \tag{6.4.1}$$

满足Einstein-Maxwell方程.

在QED中, 具有最小电磁耦合的相互作用由算符∂_μ作替换$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + ie\mathbf{A}_\mu$得到. 具体到VBS时空(6.1.1)中, 这样的代换表现为$\partial_v \to D_v = \partial_v + ieQ/r$.

在弯曲时空中, 质量为μ_0带电荷e的复标量场满足协变的Klein-Gordon方程

$$(\Box_c+\mu_0^2)\Phi=\frac{1}{\sqrt{-g}}D_\mu\big(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}D_\nu\Phi\big)+\mu_0^2\Phi=0\,, \tag{6.4.2}$$

它在VBS时空(6.1.1)中的具体表达式为

$$\begin{aligned}&\big[r^2D_v\partial_r+\partial_r(r^2D_v)+\partial_r(2r^2G\partial_r)+\partial_\theta^2+\cot\theta\partial_\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2-\mu_0^2r^2\big]\Phi\\ &=\Big\{2r^2(\partial_{vr}^2+G\partial_r^2)+[(2r^2G)_{,r}+2ieQr]\partial_r+2r\partial_v\\ &\quad+\partial_\theta^2+\cot\theta\partial_\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2+ieQ-\mu_0^2r^2\Big\}\Phi=0\,.\end{aligned} \tag{6.4.3}$$

经分离变量$\Phi=R(v,r)Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$后, 得到的径向方程

$$\begin{aligned}&\big[2r^2(\partial_{vr}^2+G\partial_r^2)+(4rG+2r^2G_{,r}+2ieQr)\partial_r\\ &\quad+2r\partial_v+ieQ-\ell(\ell+1)-\mu_0^2r^2\big]R=0\,.\end{aligned} \tag{6.4.4}$$

对方程(6.4.4)作与前面几节中完全相同的广义乌龟坐标变换处理, 可将它在视界附近化为标准形式的波动方程

$$\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}R+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}R+2(C_0+i\omega_0)\frac{\partial}{\partial r_*}R=0\,, \tag{6.4.5}$$

其中$C_0=G(r_H)/r_H=r_{H,v}/r_H$, $\omega_0=eQ/r_H$为电磁相互作用能. 方程(6.4.5)也可以直接从方程(6.4.3)作类似处理后, 经过分离变量$\Phi(v_*,r_*)=R(v_*,r_*)Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$而得到.

方程(6.4.5)经分离变量$R(v_*,r_*)=R(r_*)e^{-i\omega v_*}$后成为

$$R''=2i(\omega-\omega_0+iC_0)R'\,, \tag{6.4.6}$$

其入射波解和出射波解分别为

$$\begin{aligned}&R^{\rm in}=e^{-i\omega v_*}\,,\\ &R^{\rm out}(r>r_H)=e^{-i\omega v_*}e^{2[i(\omega-\omega_0)-C_0]r_*}\,.\end{aligned} \tag{6.4.7}$$

将出射波$R^{\rm out}(r>r_H)$沿下半复r-平面解析延拓到视界内为

$$\widetilde{R^{\rm out}}(r<r_H)=R^{\rm out}(r>r_H)e^{i\pi C_0/\kappa}e^{\pi(\omega-\omega_0)/\kappa}\,. \tag{6.4.8}$$

按照Damour-Ruffini-Sannan建议的方法, 可得到标量粒子的热辐射Bose谱为

$$\langle\mathcal{N}_\omega\rangle\simeq\frac{1}{e^{\omega/T_H}-1}\,,\qquad T_H=\frac{\kappa}{2\pi}\,. \tag{6.4.9}$$

从热辐射谱(6.4.9)中可以看出，Vaidya-Bonner-de Sitter黑洞辐射带电粒子的谱中仅多了一项$\omega_0 = eQ/r_H$，而它代表Coulomb相互作用能.

现在来研究带电的旋量粒子(例如电子)的Hawking辐射. 在有电磁场存在的情况下，静质量为μ_0、带电荷为e自旋为1/2粒子的动力学行为由四个耦合的Dirac-Chandrasekhar-Page方程描述[243]. 在Newman-Penrose表述中，其旋量形式为

$$\begin{aligned}
&(D+\epsilon-\rho+ie\mathbf{A}\cdot\mathbf{l})F_1+(\overline{\delta}+\tilde{\pi}-\alpha+ie\mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{m}})F_2=\frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}G_1\,,\\
&(\Delta+\mu-\gamma+ie\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})F_2+(\delta+\beta-\tau+ie\mathbf{A}\cdot\mathbf{m})F_1=\frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}G_2\,,\\
&(D+\epsilon^*-\rho^*+ie\mathbf{A}\cdot\mathbf{l})G_2-(\delta+\tilde{\pi}^*-\alpha^*+ie\mathbf{A}\cdot\mathbf{m})G_1=\frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}F_2\,,\\
&(\Delta+\mu^*-\gamma^*+ie\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})G_1-(\overline{\delta}+\beta^*-\tau^*+ie\mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{m}})G_2=\frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}F_1\,. \quad (6.4.10)
\end{aligned}$$

如果将G_1, G_2, eQ分别与F_2^*, $-F_1^*$, $-eQ$等同起来，就会发现方程(6.4.10)仍然可以被满足. Dirac方程在这种变换下的不变性，实质上就是它的电荷共轭不变性的体现. Dirac方程的这种不变性，意味着只需处理一对分量(F_1, F_2)即可.

采用前面已建立的零标架，将所需的旋系数和电磁势在零标架上的投影

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{l}=0\,,\quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}=Q/r\,,\qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{m}=\mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{m}}=0 \qquad (6.4.11)$$

代入方程(6.4.10)，再作代换

$$P_1=\sqrt{2}rF_1\,,\quad P_2=F_2\,,\qquad Q_1=G_1\,,\quad Q_2=\sqrt{2}rQ_2$$

可得到

$$\begin{aligned}
&-\partial_r P_1+\mathcal{L}_{1/2}P_2=i\mu_0 rQ_1\,,\qquad \mathcal{D}P_2+\mathcal{L}_{1/2}^{\dagger}P_1=i\mu_0 rQ_2\,,\\
&-\partial_r Q_2-\mathcal{L}_{1/2}^{\dagger}Q_1=i\mu_0 rP_2\,,\qquad \mathcal{D}Q_1-\mathcal{L}_{1/2}Q_2=i\mu_0 rP_1\,, \qquad (6.4.12)
\end{aligned}$$

其中算符$\mathcal{L}_n$和$\mathcal{L}_n^{\dagger}$的定义如前，而算符$\mathcal{D}$现在只是多了一项$2ieQr$,

$$\mathcal{D}=2r^2(\partial_v+G\partial_r)+(r^2G)_{,r}+2ieQr\,.$$

方程(6.4.12)经分离变量

$$\begin{aligned}
&P_1=R_1(v,r)S_1(\theta,\varphi)\,,\qquad P_2=R_2(v,r)S_2(\theta,\varphi)\,,\\
&Q_1=R_2(v,r)S_1(\theta,\varphi)\,,\qquad Q_2=R_1(v,r)S_2(\theta,\varphi)
\end{aligned}$$

后退耦为径向部分

$$\partial_r R_1 = (\lambda - i\mu_0 r)R_2\,, \quad \mathcal{D}R_2 = (\lambda + i\mu_0 r)R_1 \tag{6.4.13}$$

和角向部分

$$\mathcal{L}^{\dagger}_{1/2}S_1 = -\lambda S_2\,, \quad \mathcal{L}_{1/2}S_2 = \lambda S_1\,, \tag{6.4.14}$$

其中分离变量常数$\lambda = \ell + 1/2$, $S_1(\theta,\varphi)$和$S_2(\theta,\varphi)$分别是自旋权重为$p = \pm 1/2$的旋量球谐函数${}_{\pm 1/2}Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$.

对于Hawking效应而言, 角向部分与热辐射无关, 故只需关心径向方程在视界附近的渐近行为. 对一阶径向方程作类似前面的广义乌龟坐标变换处理后可得到

$$\frac{\partial}{\partial r_*}R_1 = 0\,, \quad \frac{\partial}{\partial r_*}R_2 \neq 0\,, \qquad 2G(r_H) = 2r_{H,v}\,. \tag{6.4.15}$$

对二阶的径向方程

$$\begin{aligned} &2r^2(\partial^2_{vr} + G\partial^2_r)R_1 + \big[(r^2G)_{,r} + 2ieQr \\ &\qquad +2r^2G\frac{i\mu_0\lambda - \mu_0^2 r}{\lambda^2 + \mu_0^2 r^2}\big]\partial_r R_1 - (\lambda^2 + \mu_0^2 r^2)R_1 = 0\,, \end{aligned} \tag{6.4.16}$$

$$\begin{aligned} &2r^2(\partial^2_{vr} + G\partial^2_r)R_2 + \big[3(r^2G)_{,r} + 2ieQr\big]\partial_r R_2 + 4r\partial_v R_2 \\ &\quad -\frac{i\mu_0\lambda + \mu_0^2 r}{\lambda^2 + \mu_0^2 r^2}\big[2r^2G\partial_r + 2r^2\partial_v + (r^2G)_{,r} + 2ieQr\big]R_2 \\ &\qquad +\big[(r^2G)_{,rr} + 2ieQ - (\lambda^2 + \mu_0^2 r^2)\big]R_2 = 0 \end{aligned} \tag{6.4.17}$$

作完全类似的处理后产生

$$\begin{aligned} &\big[\frac{A}{2\kappa} + 4G(r_H) - 2r_{H,v}\big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}R_1 + 2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}R_1 + \big[-A + G_{,r}(r_H) \\ &\qquad +\frac{2ieQ + 2G(r_H)}{r_H} + 2G(r_H)\frac{i\mu_0\lambda - \mu_0^2 r_H}{\lambda^2 + \mu_0^2 r_H^2}\big]\frac{\partial}{\partial r_*}R_1 \\ &= \big[\frac{A}{2\kappa} + 2G(r_H)\big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}R_1 + 2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}R_1 = 0 \end{aligned} \tag{6.4.18}$$

和

$$
\begin{aligned}
&\Big[\frac{A}{2\kappa}+4G(r_H)-2r_{H,v}\Big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}R_2+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}R_2+\Big\{-A+3G_{,r}(r_H)\\
&\quad+\frac{2ieQ+2G(r_H)}{r_H}-\frac{i\mu_0\lambda+\mu_0^2r_H}{r_H^2(\lambda^2+\mu_0^2r_H^2)}\big[2G(r_H)-2r_{H,v}\big]\Big\}\frac{\partial}{\partial r_*}R_2\\
&=\Big[\frac{A}{2\kappa}+2G(r_H)\Big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}R_2+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}R_2\\
&\quad+\Big[-A+3G_{,r}(r_H)+\frac{2ieQ+2G(r_H)}{r_H}\Big]\frac{\partial}{\partial r_*}R_2=0\,,
\end{aligned}
\tag{6.4.19}
$$

其中系数$A=2G_{,r}(r_H)$. 在计算过程中已利用了关系式$2G(r_H)=2r_{H,v}$和$\frac{\partial}{\partial r_*}R_1=0$.

再调节参数κ, 使方程(6.4.18)和(6.4.19)中二阶导数项前面的系数比为$1:2$, 可得到表面引力为

$$
\kappa=\frac{G_{,r}(r_H)}{1-2G(r_H)}=\frac{G_{,r}(r_H)}{1-2r_{H,v}}\,,
\tag{6.4.20}
$$

并使方程(6.4.18)和(6.4.19)在视界附近化为

$$
\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}R_1+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}R_1=0\,,\quad \frac{\partial}{\partial r_*}R_1=0\,,
\tag{6.4.21}
$$

$$
\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}R_2+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}R_2+2(C_{1/2}+i\omega_0)\frac{\partial}{\partial r_*}R_2=0\,,
\tag{6.4.22}
$$

其中ω_0, $C_{1/2}$可视为有限实常数,

$$
\omega_0=\frac{eQ}{r_H}\,,\qquad C_{1/2}=\frac{G_{,r}(r_H)}{2}+\frac{G(r_H)}{r_H}\,.
$$

从方程(6.4.21)可以得知R_1在视界面上为常数, 其正则解$R_1\simeq e^{-i\omega v_*}$意味着Hawking辐射对于$(P_1,Q_2)$分量是不存在的. 对方程(6.4.22)则可进一步分离变量$R_2=R_2(r_*)e^{-i\omega v_*}$得到

$$
R_2''=2[i(\omega-\omega_0)-C_{1/2}]R_2'\,,
\tag{6.4.23}
$$

其一般解为

$$
R_2=R_{21}e^{2[i(\omega-\omega_0)-C_{1/2}]r_*}+R_{20}\,.
\tag{6.4.24}
$$

因此方程(6.4.22)的入射波解和出射波解为

$$R_2^{\rm in} = e^{-i\omega v_*}\,,$$
$$R_2^{\rm out}(r > r_H) = e^{-i\omega v_*} e^{2[i(\omega-\omega_0)-C_{1/2}]r_*}\,. \tag{6.4.25}$$

经解析延拓后在视界内侧的出射波解为

$$\widetilde{R_2^{\rm out}}(r < r_H) = R_2^{\rm out}(r > r_H) e^{i\pi C_{1/2}/\kappa} e^{\pi(\omega-\omega_0)/\kappa}\,. \tag{6.4.26}$$

按照DRS方法, 易得带电的Dirac粒子的黑体辐射Fermi谱为

$$\langle \mathcal{N}_\omega \rangle \simeq \frac{1}{e^{(\omega-\omega_0)/T_H} + 1}\,, \qquad T_H = \frac{\kappa}{2\pi}\,. \tag{6.4.27}$$

与带电的标量粒子的热辐射谱(6.4.9)相比, 除去自旋统计关系导致的差别外, 其谱形式是一致的, 而且相互作用能只有电磁能ω_0一项, 没有其它新的量子效应.

§6.5 不存在新的量子(热)能层效应

在前面几节中, 我们分别研究了动态球对称黑洞中标量介子、电子以及光子的Hawking辐射, 发现对于高自旋粒子, 其Hawking辐射对于场的不同分量是不对称的. 我们认为这种不对称性起源于在超前Eddington-Finkelstein坐标系中Vaidya-型时空的过去-未来不对称性. 研究表明, 只有同时考虑了一阶方程和二阶方程在理论上才是完全自洽的, 正是由于一阶方程的限制, 才导致了这种Hawking辐射的非对称性.

前几节的研究还表明用广义乌龟坐标变换法(GTCT)研究球对称黑洞的Hawking 效应, 不必事先对场方程进行分离变量. 这是因为其角向部分与Hawking辐射没有关系, 需要考虑的只是径向部分. 如果事先不对场方程进行退耦处理, 而是先作广义乌龟坐标变换, 得到的波动方程正是先经退耦然后作乌龟坐标变换处理后的径向部分所满足的方程. 可见广义乌龟坐标变换法并不要求对场方程事先实行退耦处理, 其核心只是要依据时空的对称性引入具体的乌龟坐标变换关系式. 因此, 这一方法适用于研究任意黑洞的量子热效应.

研究还进一步揭示, 在带电情形下, 带电的球对称黑洞没有新的量子热效应, 而只有Coulomb相互作用能, 这也是由于考虑到了一阶方程的缘故. 如果忽略了这一点, 就会导致不正确的结论.

基于Vaidya-型时空中自旋场的广义Teukolsky-型主方程[318](对于标量场, Dirac场, 电磁场和引力场, 自旋s分别等于0, 1/2, 1和2), 文献[310-316]的作者宣称Vaidya- Bonner-de Sitter黑洞存在一种新的量子能层效应, 他们证明这一效应由下式

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{2(1-s-p)p\mu_0\lambda r_{H,v}}{\lambda^2+(2p\mu_0 r_H)^2}, \qquad (p=\pm s) \\ &= \begin{cases} \frac{-(\ell+1/2)\mu_0 r_{H,v}}{(\ell+1/2)^2+(\mu_0 r_H)^2} & (\mu_0\neq 0,\ s=-p=1/2) \\ 0 & \text{其它情形} \end{cases} \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

描述, 其中μ_0是自旋为s的量子场的质量.

就他们所采用的主方程而言, 由于只有Klein-Gordon粒子和Dirac场的质量不为零, 所以他们的论证事实上只对有质量的自旋为1/2的粒子成立, 即该效应仅存在于Dirac粒子的手征为$p=-1/2$的自旋态. 由此他们发现对于有质量的Dirac场, 其手征$p=1/2$的自旋态在辐射机制方面与手征$p=-1/2$的自旋态非常不同, 并且认为它起源于在非静态时空中视界附近由自旋态导致的Dirac真空变化, 进而猜想这种效应是一种量子能层效应, 即量子能层可以影响黑洞的辐射机制, 有质量的自旋场的辐射机制依赖于自旋态. 然而这一效应有一个非常奇怪的特征, 就是它明显与自旋1/2粒子的质量有关. 但是我们知道, Hawking辐射一般是与粒子(场)的质量无关的.

为了澄清是否存在这一效应, 这一节重新考察动态球对称黑洞中Dirac粒子的Hawking 辐射. 我们事先不对Dirac场方程退耦, 而是直接进行乌龟坐标变换处理, 最后才根据时空的球对称性一次给出合理的分离变量形式. 我们严格地证明对于任意球对称黑洞, 不论是静态的还是非静态的, 不可能有任何新的量子热效应. 我们指出文献[310-316]中导出的所谓新的量子能层效应是不存在的, 导致这一不正确结论的原因是没有考虑到一阶场方程对Hawking辐射加上的限制.

我们的出发点是上一节中的方程(6.4.12)即

$$\begin{aligned} &-\partial_r P_1+\mathcal{L}_{1/2}P_2=i\mu_0 rQ_1\,, \qquad \mathcal{D}P_2+\mathcal{L}^\dagger_{1/2}P_1=i\mu_0 rQ_2\,, \\ &-\partial_r Q_2-\mathcal{L}^\dagger_{1/2}Q_1=i\mu_0 rP_2\,, \qquad \mathcal{D}Q_1-\mathcal{L}_{1/2}Q_2=i\mu_0 rP_1\,, \end{aligned} \tag{6.5.2}$$

其中算符$\mathcal{L}_n$和$\mathcal{L}^\dagger_n$的定义如前, 而算符$\mathcal{D}$为

$$\mathcal{D}=2r^2(\partial_v+G\partial_r)+r^2G_{,r}+2rG+2ieQr\,.$$

由于在方程(6.5.2)中把Q_1, Q_2, eQ分别与P_2^*, $-P_1^*$, $-eQ$等同, 仍旧可以使该方程成立, 所以只需处理一对分量(P_1,P_2)即可. 通过对(P_1,P_2)取复共轭可以得到

对(Q_1, Q_2)的分析结果, 这将使计算量减少一半. 尽管方程(6.5.2)可以退耦为径向部分和角向部分, 但我们事先并不作这样的处理. 对于热辐射问题, 我们关心的是方程(6.5.2)在视界附近的渐近行为. 与前面的处理完全类似, 对方程(6.5.2)作广义乌龟坐标变换处理后得到

$$\frac{\partial}{\partial r_*}P_1 = 0\,, \qquad 2r_H^2\big[G(r_H) - r_{H,v}\big]\frac{\partial}{\partial r_*}P_2 = 0\,. \tag{6.5.3}$$

对于Q_1和Q_2存在类似的关系式. 从方程(6.5.3)中可得到视界面方程$2G(r_H) = 2r_{H,v}$.

为了研究自旋1/2粒子的分量P_1和P_2分量的Hawking辐射, 需要考虑Dirac方程的二阶形式在视界附近的渐近行为. 经直接计算得到(P_1, P_2)分量的二阶方程

$$\Big[2r^2\big(\partial_{vr}^2 + G\partial_r^2\big) + \mathcal{L}_{1/2}\mathcal{L}_{1/2}^\dagger - \mu_0^2 r^2 + (2ieQr + r^2G_{,r} + 2rG)\partial_r\Big]P_1 = -2ir^2G\mu_0Q_1\,, \tag{6.5.4}$$

$$\Big[2r^2\big(\partial_{vr}^2 + G\partial_r^2\big) + \mathcal{L}_{1/2}^\dagger\mathcal{L}_{1/2} + (2ieQr + 3r^2G_{,r} + 6rG)\partial_r + 4r\partial_v + r^2G_{,rr} + 4rG_{,r} + 2G + 2ieQ - \mu_0^2r^2\Big]P_2 = i\mu_0Q_2\,, \tag{6.5.5}$$

其中

$$\mathcal{L}_{1/2}^\dagger\mathcal{L}_{1/2} = \partial_\theta^2 + \cot\theta\partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 + \frac{i\cos\theta}{\sin^2\theta}\partial_\varphi - \frac{1}{4\sin^2\theta} - \frac{1}{4}\,,$$
$$\mathcal{L}_{1/2}\mathcal{L}_{1/2}^\dagger = \partial_\theta^2 + \cot\theta\partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 - \frac{i\cos\theta}{\sin^2\theta}\partial_\varphi - \frac{1}{4\sin^2\theta} - \frac{1}{4}\,.$$

P_1分量和P_2分量的角向部分为旋量球谐函数${}_{\pm 1/2}Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$, 易证它们满足

$$\mathcal{L}_{1/2}\mathcal{L}_{1/2}^\dagger P_1 = -(\ell + 1/2)^2 P_1\,, \qquad \mathcal{L}_{1/2}^\dagger\mathcal{L}_{1/2}P_2 = -(\ell + 1/2)^2 P_2\,.$$

方程(6.5.4)和(6.5.5)在作广义乌龟坐标变换处理后, 在视界附近化为

$$
\begin{aligned}
&\Big\{\frac{\widetilde{A}}{2\kappa}+r_H^2[4G(r_H)-2r_{H,v}]\Big\}\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}P_1+2r_H^2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}P_1\\
&\quad=\Big\{\frac{\widetilde{A}}{2\kappa}+2r_H^2r_{H,v}]\Big\}\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}P_1+2r_H^2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}P_1=0\,, \qquad (6.5.6)\\
&\Big\{\frac{\widetilde{A}}{2\kappa}+r_H^2[4G(r_H)-2r_{H,v}]\Big\}\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}P_2+2r_H^2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}P_2\\
&+\Big\{-\widetilde{A}+3r_H^2G_{,r}(r_H)+2ieQr_H+r_H[6G(r_H)-4r_{H,v}]\Big\}\frac{\partial}{\partial r_*}P_2\\
&\quad=\Big\{\frac{\widetilde{A}}{2\kappa}+2r_H^2r_{H,v}]\Big\}\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}P_2+2r_H^2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}P_2\\
&\qquad+\Big\{-\widetilde{A}+3r_H^2G_{,r}(r_H)+2ieQr_H+2r_HG(r_H)\Big\}\frac{\partial}{\partial r_*}P_2=0\,, \qquad (6.5.7)
\end{aligned}
$$

其中系数$\widetilde{A}=2r_H^2G_{,r}(r_H)$. 在导出方程(6.5.6)和(6.5.7)的过程中已利用了关系式$\frac{\partial}{\partial r_*}P_1=0$和视界面方程$2G(r_H)=2r_{H,v}$.

再调节参数κ可使二阶导数项的系数之比为1 : 2, 即令$\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}$项的系数等于$r_H^2$, 可得到事件视界的表面引力

$$
\kappa=\frac{G_{,r}(r_H)}{1-2G(r_H)}=\frac{G_{,r}(r_H)}{1-2r_{H,v}}\,. \qquad (6.5.8)
$$

与此同时可将方程(6.5.6)和(6.5.7)在视界附近化为标准形式的波动方程

$$
\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}P_1+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}P_1=0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial r_*}P_1=0\,, \qquad (6.5.9)
$$

$$
\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}P_2+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}P_2+2(C_{1/2}+i\omega_0)\frac{\partial}{\partial r_*}P_2=0\,, \qquad (6.5.10)
$$

式中ω_0, C可视为有限实常数,

$$
\omega_0=\frac{eQ}{r_H}\,, \qquad C=\frac{1}{2}G_{,r}(r_H)+\frac{r_{H,v}}{r_H}\,.
$$

由于P_1和P_2的角向部分与Hawking辐射无关, 所以我们在下面的讨论中可以忽略它们. P_1和P_2的径向部分R_1和R_2满足与它们完全相同的方程

$$
\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}R_1+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}R_1=0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial r_*}R_1=0\,, \qquad (6.5.11)
$$

$$
\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}R_2+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}R_2+2(C_{1/2}+i\omega_0)\frac{\partial}{\partial r_*}R_2=0\,. \qquad (6.5.12)
$$

从方程(6.5.11)可知, R_1在视界上是常数, 其解$R_1 \sim e^{-i\omega v_*}$意味着$(P_1, Q_2)$不参与Hawking的辐射. 对方程(6.5.12)可作分离变量$R_2 = R_2(r_*)e^{-i\omega v_*}$处理, 然后采用DRS方法可得到Dirac粒子的热辐射Fermi谱为

$$\langle \mathcal{N}_\omega \rangle \simeq \frac{1}{e^{(\omega-\omega_0)/T_H} + 1}, \qquad T_H = \frac{\kappa}{2\pi}. \tag{6.5.13}$$

从标量粒子和Dirac粒子的热辐射谱中不难可以看出, 除了Coulomb能ω_0外, Vaidya-型时空没有其它新的相互作用效应. 两者的辐射谱除自旋统计因子不同之外, 均具有黑体辐射谱形式, 这意味着Vaidya-型黑洞中Dirac粒子和标量场的热辐射谱中没有新的量子能层效应出现. 因此我们证明了对于球对称黑洞不论它是静态的还是非静态的, 不可能存在新的量子热效应. 以往文献中出现的不正确结果是因为忽略了对一阶方程同时作广义乌龟坐标变换处理而导致的.

§6.6 小结

在这一章中, 我们用广义乌龟坐标变换法研究了动态球对称黑洞的量子热效应, 求出了动态黑洞的事件视界和Hawking温度, 表明它们是随时间而变化的, 但在某一固定时刻v_0, 它们是球对称的. 我们分别考察标量粒子(介子), Dirac 粒子(电子)以及光子的Hawking辐射, 导出了它们的热辐射谱. 对这一类属于Petrov D-型的黑洞, 研究表明:

一. 广义乌龟坐标变换的引入需要考虑到时空的对称性, 其具体的表达式依赖于具体的时空度规. 这一变换是作为工作假设而引入的.

二. 考察Hawking辐射只需关心径向部分在视界附近的渐近行为. 为此, 须适当调节参数κ使二阶方程在事件视界附近化为标准形式的波动方程.

三. 能自动得到事件视界面方程和Hawking温度, 可以通过多种途径导出前者, 而且结果完全一致.

四. 对于高自旋粒子的Hawking蒸发, 我们还需同时考虑其一阶方程在视界附近的渐近形式. 只有这样做, 在理论上才是完全自洽的.

五. 动态球对称黑洞中高自旋粒子的Hawking辐射对于不同的场分量是不对称的. 对于自旋为1/2的Dirac粒子, 只有(F_2, G_1)旋量分量参与Hawking 辐射; 对于自旋为1的光子, 只有Maxwell复标量ϕ_0分量才具有Hawking效应. 这一特点是动态

球对称黑洞中高自旋粒子的Hawking辐射所具有的共性. 这种不对称性与在超前的Eddington-Finkelstein坐标系中时空的过去-未来不对称性有关.

六. 动态球对称黑洞不可能具有任何新的量子热效应或量子能层效应. 所谓新的与粒子静质量有关的量子热效应, 是因为没有考虑到一阶方程而导致的错误结果.

七. 广义乌龟坐标变换法不需事先对场方程作分离变量处理, 因而能处理任意黑洞中不同自旋粒子的Hawking辐射.

第七章 动态轴对称黑洞的量子热效应

"The spin-rotation coupling effect shows that a non-stationary Kerr space-time has some distinct effects different from that of a stationary Kerr black hole. This effect is not shared by a stationary Kerr black hole or a Vaidya-type spherically symmetric black hole."

众所周知, 任何一种稳态黑洞表面上各点的温度均相等. 所有动态球对称黑洞的温度随时间而变化, 但在同一时刻表面各点的温度也总是相同. 然而对于非球对称的动态黑洞, 表面各点温度却有可能不同. 研究表明, 动态Kerr(-Newman)黑洞事件视界表面上的温度处处不相同, 而且随时间变化.

稳态轴对称Kerr黑洞的热效应早已得到相当充分的研究. 但是由于蒸发和吸积, 现实宇宙中实际存在的黑洞不会是稳态的, 一定会随时间变化, 因此研究动态黑洞的热效应非常必要. 用流行的考察辐射反作用方法去研究动态轴对称时遇到了很大的困难, 目前只能处理球对称的动态黑洞. 广义乌龟坐标变换法(GTCT) 则不受"球对称"的限制, 原则上可用于任何动态黑洞.

广义乌龟坐标变换法(GTCT)已成功地用来处理动态Kerr(-Newman)黑洞中标量粒子的Hawking蒸发[319–322]. 但是在我们的工作[270–274]出现以前, Dirac粒子等高自旋粒子的Hawking辐射还没有得到很好的研究.

从前面几章对Dirac粒子的Hawking辐射的讨论中, 我们已看到在应用GTCT方法时如果考虑到对一阶方程同时作处理, 则会使问题迎刃而解. 实际上对这一点有一个深刻的认识是从处理动态Kerr黑洞中Dirac粒子的Hawking蒸发开始的. 对于高自旋粒子的Hawking辐射, 必须同时对一阶和二阶方程作乌龟坐标变换(GTCT)处理. 我们称经过这样作了进一步推广的的DRS方法, 称之为DRS-Zhao-Wu-Cai(DRS-ZWC) 方法. 用这个方法已依次研究了动态Kerr黑洞中Dirac粒子和光子的Hawking辐射, 表明这类黑洞具有自旋-转动耦合效应.

本章就用这种推广了的GTCT方法— DRS-ZWC法来研究动态轴对称黑洞中的量子热效应.

§7.1 动态Kerr黑洞中标量粒子的Hawking效应

在超前的Eddington-Finkelstein(EF)坐标系中, 动态Kerr黑洞[19–23]的度规表为

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= \frac{\Delta}{\Sigma}(dv - a\sin^2\theta d\varphi)^2 - 2dr(dv - a\sin^2\theta d\varphi) \\
&\quad -\frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\left[adv - (r^2+a^2)d\varphi\right]^2 - \Sigma d\theta^2 \,, \qquad (7.1.1)
\end{aligned}
$$

其中$\Delta = r^2 - 2M(v)r + a^2$, $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$. 黑洞质量$M(v)$ 依赖于超前时间v, 但比角动量$a = J/M$是一个常数.

动态Kerr黑洞的线元(7.1.1)是稳态的Kerr解在动态情形下的一个自然推广, 它属于Petrov II-型, 而稳态Kerr黑洞属于Petrov D-型. 时空(7.1.1)的几何由三类特别有兴趣的曲面刻划: 表面视界(AH) $r_{\rm AH}^{\pm} = M \pm (M^2 - a^2)^{1/2}$, 类时极限面(TLS) $r_{\rm TLS}^{\pm} = M \pm (M^2 - a^2\cos^2\theta)^{1/2}$和事件视界(EH) $r_{\rm EH}^{\pm} = r_H$. 事件视界必须是一个类光(零)曲面$r = r(v,\theta)$, 满足类光(零)曲面条件: $g^{\mu\nu}\partial_\mu F\partial_\nu F = 0$和$F(v,r,\theta) = 0$.

零曲面方程$g^{\mu\nu}\partial_\mu F\partial_\nu F = 0$在时空(7.1.1)中可写成

$$
\begin{aligned}
& a^2\sin^2\theta(\partial_v F)^2 + 2(r^2+a^2)\partial_v F\partial_r F + \Delta(\partial_r F)^2 \\
& \quad +(\partial_\theta F)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}(\partial_\varphi F)^2 + 2a(\partial_r F + \partial_v F)\partial_\varphi F = 0 \,. \qquad (7.1.2)
\end{aligned}
$$

考虑到动态Kerr度规的轴对称性, 零曲面$F = F(v,r,\theta) = 0$ 又可写成另一种形式$r = r(v,\theta)$. 从这一形式可以导出

$$
\partial_r F\frac{\partial r}{\partial v} + \partial_v F = 0 \,, \quad \partial_r F\frac{\partial r}{\partial \theta} + \partial_\theta F = 0 \,, \quad \partial_\varphi F = 0 \,. \qquad (7.1.3)
$$

将(7.1.3)式代入(7.1.2)式可得到

$$
a^2\sin^2\theta(\partial_v r)^2 - 2(r^2+a^2)\partial_v r + \Delta + (\partial_\theta r)^2 = 0 \,, \qquad (7.1.4)
$$

式中$\partial_v r = \partial r/\partial v$, $\partial_\theta r = \partial r/\partial\theta$.

满足$r = r_H(v,\theta)$的(7.1.4)式就是决定动态Kerr黑洞视界位置的零曲面方程, 其解为

$$r_H = \frac{M \pm [M^2 - (a^2 \sin^2\theta r_{H,v}^2 + r_{H,\theta}^2)(1 - 2r_{H,v}) - a^2(1 - 2r_{H,v})^2]^{1/2}}{1 - 2r_{H,v}}, \quad (7.1.5)$$

其中$r_{H,v} = \partial_v r_H = \partial r/\partial v|_{r=r_H}$, $r_{H,\theta} = \partial_\theta r_H = \partial r/\partial\theta|_{r=r_H}$, 它们描述事件视界随超前时间$v$的演化和沿角度$\theta$方向的变化, 反映了在视界附近有量子能层存在. 显然, 事件视界的二维同时面不是球对称的, 与方位角θ有关.

前面已经指出, 广义乌龟坐标变换法(GTCT)可以有效地确定动力黑洞的事件视界的位置. 事实上, 事件视界位置也可以利用广义乌龟坐标变换法通过多种途径导出. 例如, 它可以从对零曲面方程(7.1.2)作GTCT处理而导出. 因为我们现在考虑的动态Kerr黑洞关于φ-轴是对称的, 我们可以引入如下的广义乌龟坐标变换:

$$r_* = r + \frac{1}{2\kappa}\ln\left[r - r_H(v,\theta)\right], \qquad v_* = v - v_0, \quad \theta_* = \theta - \theta_0, \quad (7.1.6)$$

其中$r_H = r_H(v,\theta)$为事件视界的位置, $\kappa = \kappa(v_0,\theta_0)$为一个可调节的参数. 所有参数$\kappa$, v_0和θ_0 在乌龟坐标变换下是常数, v_0和θ_0标识黑洞的初始状态. 由(7.1.6)式导出的一阶导数、二阶导数之间的变换关系式见附录B.

对零曲面方程(7.1.2)应用广义乌龟坐标变换(7.1.6)并取$r \to r_H(v_0,\theta_0)$, $v \to v_0$和$\theta \to \theta_0$的极限后可以得到

$$\left[\Delta_H - 2(r_H^2 + a^2)r_{H,v} + a^2\sin^2\theta_0 r_{H,v}^2 + r_{H,\theta}^2\right]\left(\frac{\partial}{\partial r_*}F\right)^2 = 0. \quad (7.1.7)$$

由方括号中的系数项为零可以导出动态Kerr黑洞的事件视界方程

$$\Delta_H - 2(r_H^2 + a^2)r_{H,v} + a^2\sin^2\theta_0 r_{H,v}^2 + r_{H,\theta}^2 = 0, \quad (7.1.8)$$

式中$\Delta_H = r_H^2 - 2M(v_0)r_H + a^2$. 由(7.1.8)可解出在$v = v_0$时刻和$\theta = \theta_0$极角方向的事件视界位置的表达式(7.1.5).

现在考虑动态Kerr时空中的Klein-Gordon方程. 描述质量为μ_0的标量粒子动力学行为的Klein-Gordon场方程: $(\Box + \mu_0^2) = 0$在时空(7.1.1)中的明显表达式为

$$\begin{aligned}\big[\Delta\partial_r^2 + 2(r^2 + a^2)\partial_{vr}^2 + 2a\partial_{r\varphi}^2 + 2a\partial_{v\varphi}^2 + a^2\sin^2\theta\partial_v^2 + \partial_\theta^2 \\ + \cot\theta\partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 + 2r\partial_v + 2(r - M)\partial_r - \mu_0^2\Sigma\big]\Phi = 0. \quad (7.1.9)\end{aligned}$$

我们将讨论视界r_H在$v=v_0$时刻和$\theta=\theta_0$极角处的Hawking效应，为此需要考虑Klein-Gordon方程(7.1.9)在视界处的渐近行为. 在作乌龟坐标变换(7.1.6)并取趋于视界的极限后，方程(7.1.9)化为

$$\begin{aligned}\Big\{\Big[\frac{A}{2\kappa}+2\Delta_H-2r_{H,v}(r_H^2+a^2)\Big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+2(r_H^2+a^2-r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0)\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}\\ -2r_{H,\theta}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}+2a(1-r_{H,v})\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi}-[A-2(r_H-M)\\ +2r_Hr_{H,v}+r_{H,\theta}\cot\theta_0+r_{H,\theta\theta}+r_{H,vv}a^2\sin^2\theta_0]\frac{\partial}{\partial r_*}\Big\}\Phi=0\,,\end{aligned}\tag{7.1.10}$$

其中系数A为一个0/0-型不定式，可用L' Hôspital法则求出其有限值为

$$\begin{aligned}A&=\lim_{\substack{r\to r_H(v_0,\theta_0)\\ v\to v_0,\,\theta\to\theta_0}}\frac{\Delta-2(r^2+a^2)r_{H,v}+a^2\sin^2\theta r_{H,v}^2+r_{H,\theta}^2}{r-r_H}\\ &=2(r_H-M)-4r_Hr_{H,v}\,.\end{aligned}\tag{7.1.11}$$

由视界面方程(7.1.8)可知，当$r\to r_H$时上式中右边分式的分母和分子都趋于零，所以此分式在$r\to r_H$时是一个0/0-型不定式. 反之，令该分子在$r=r_H$时为零，即可给出决定事件视界位置的方程(7.1.8).

将系数A代入方程(7.1.10)后可得到

$$\begin{aligned}\Big\{\Big[\frac{r_H(1-2r_{H,v})-M}{\kappa}+2\Delta_H-2r_{H,v}(r_H^2+a^2)\Big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}\\ +2(r_H^2+a^2-r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0)\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}-2r_{H,\theta}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}\\ +2a(1-r_{H,v})\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi}-(-2r_Hr_{H,v}+r_{H,\theta}\cot\theta_0\\ +r_{H,\theta\theta}+r_{H,vv}a^2\sin^2\theta_0)\frac{\partial}{\partial r_*}\Big\}\Phi=0\,.\end{aligned}\tag{7.1.12}$$

为了使方程(7.1.12)在视界附近化成标准形式的波动方程，可以通过调节参数κ使二阶导数项$\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}$与$\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}$的系数之比为$1:2$，即令

$$\frac{r_H(1-2r_{H,v})-M}{\kappa}+2\Delta_H-2r_{H,v}(r_H^2+a^2)=r_H^2+a^2-r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0\,,\tag{7.1.13}$$

这给出视界的表面引力

$$\begin{aligned}\kappa&=\frac{r_H(1-2r_{H,v})-M}{(r_H^2+a^2)(1+2r_{H,v})-2\Delta_H-r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0}\\ &=\frac{r_H(1-2r_{H,v})-M}{r_H^2+a^2-\Delta_H+r_{H,\theta}^2-a^2\sin^2\theta_0r_{H,v}(1-r_{H,v})}\,,\end{aligned}$$

或者

$$\kappa = \frac{r_H(1-2r_{H,v}) - M}{(r_H^2 + a^2 - r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0)(1-2r_{H,v}) + 2r_{H,\theta}^2}. \tag{7.1.14}$$

经过这样的参数调节处理后, Klein-Gordon方程(7.1.12)在$r = r_H$ 附近可化成

$$[\frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*} + 2\Omega_H\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi} + 2C_3\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*} + 2C_2\frac{\partial}{\partial r_*}]\Phi = 0\,, \tag{7.1.15}$$

式中

$$\Omega_H = \frac{a(1-r_{H,v})}{r_H^2 + a^2 - r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0}\,,\quad C_3 = \frac{-r_{H,\theta}}{r_H^2 + a^2 - r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0}\,,$$
$$C_2 = -\frac{-2r_Hr_{H,v} + r_{H,\theta}\cot\theta_0 + r_{H,\theta\theta} + r_{H,vv}a^2\sin^2\theta_0}{2(r_H^2 + a^2 - r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0)}.$$

由于方程(7.1.15)中的各系数可视为有限的实常数, 因而该方程可看作常微分方程, 可以作分离变量处理如下

$$\Phi = R(r_*)\Theta(\theta_*)e^{i(m\varphi - \omega v_*)}\,,$$

其中ω为粒子的能量, m为粒子的角动量磁量子数. 将这一分离变量方案代入方程(7.1.15)后, 得到径向部分和角向部分

$$R'' + 2(C_0 + im\Omega_H - i\omega)R' = 0\,,\qquad \Theta' = \lambda\Theta\,, \tag{7.1.16}$$

其中λ为分离变量时引进的常数, $C_0 = \lambda C_3 + C_2$. 如果把极角θ_*的定义域限制在$(0,\pi)$之间, 并考虑到当轴对称过渡到球对称时, Θ将成为Legendre函数的一部分, 我们应把λ 选为实数. 方程(7.1.16)的解为

$$R = R_1e^{2[i(\omega - m\Omega_H) - C_0]r_*} + R_0\,,\qquad \Theta = e^{\lambda\theta_*}\,, \tag{7.1.17}$$

式中R_0, R_1为积分常数.

方程(7.1.15)的入射波解和出射波解分别为

$$\Phi^{in} = e^{-i\omega v_* + im\varphi + \lambda\theta_*}\,,$$
$$\Phi^{\rm out}(r > r_H) = e^{-i\omega v_* + im\varphi + \lambda\theta_*}e^{2[i(\omega - m\Omega_H) - C_0]r_*}. \tag{7.1.18}$$

在视界附近有 $r_* \sim \frac{1}{2\kappa}\ln(r - r_H)$, 出射波$\Phi^{\rm out}(r > r_H)$在$r = r_H$处不解析, 但能通过下半复$r$-平面将其从视界外解析延拓到视界内, 即

$$(r - r_H) \longrightarrow (r_H - r)e^{-i\pi}\,,$$

于是

$$\Phi^{\text{out}}(r > r_H) \longrightarrow \widetilde{\Phi^{\text{out}}}(r < r_H) = \Phi^{\text{out}}(r > r_H) e^{i\pi C_0/\kappa} e^{\pi(\omega - m\Omega_H)/\kappa}. \qquad (7.1.19)$$

出射波在视界处的相对散射几率为

$$\left|\frac{\Phi^{\text{out}}}{\widetilde{\Phi^{\text{out}}}}\right|^2 = e^{-2\pi(\omega - m\Omega_H)/\kappa}. \qquad (7.1.20)$$

遵循DRS方法, 容易证明出射波具有黑体辐射谱

$$\langle \mathcal{N}_\omega \rangle \simeq \frac{1}{e^{(\omega - m\Omega_H)/T_H} - 1}, \qquad T_H = \frac{\kappa}{2\pi}. \qquad (7.1.21)$$

式中Ω_H为动态Kerr黑洞视界的拖曳角速度, $m\Omega_H$为转动能. 当$a = 0$时, 这时$r_{H,\theta} = \Omega_H = C_3 = 0$, $C_2 = r_{H,v}/r_H$, 视界位置$r_H = 2M/(1 - 2r_{H,v})$和表面引力$\kappa = 1/r_H$均回到Vaidya 黑洞情形; 当时空回到稳态时, $r_{H,v} = r_{H,\theta} = C_3 = 0$且$\Delta_H = 0$, 视界位置$r_H = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$, 表面引力$\kappa = (r_H - M)/(r_H^2 + a^2)$以及拖曳速度$\Omega_H = a/(r_H^2 + a^2)$都回到稳态Kerr黑洞情形.

我们看到动态Kerr黑洞的事件视界不是球对称的, 视界位置、拖曳角速度和Hawking温度不仅随时间变化, 而且与方位角有关. 以往研究的稳定黑洞或球对称的动态黑洞, 它们表面上各点的湿度总是相同的.

§7.2 动态Kerr黑洞中旋量粒子的Hawking蒸发

在上节中我们用广义乌龟坐标变换法研究了动态Kerr黑洞中标量粒子的Hawking 效应, 本节我们用这一方法来研究Dirac粒子的Hawking辐射, 表明Fermi-Dirac 谱比Bose-Einstein谱多了一项剩余的效应.

自Hawking的杰出发现[57]以来, 在上世纪末的最后25年中, 黑洞物理学研究的许多方面都获得了长足的发展, 其中一个非常重要的方面就是揭示了许多黑洞的热辐射性质[2]. 人们对球对称、稳态轴对称或非静态黑洞中标量场和Dirac粒子的热辐射已作了大量的研究[51].

确定蒸发黑洞事件视界的位置和温度的一个流行的传统方法是计算重整化能动张量的真空期望值[289]. 但这一方法过于复杂, 仅给出视界位置和温度的近似值, 因而用途有限, 目前仅适用于对球对称动态黑洞的研究, 在其它许多场合则遇到了很大的困难. 而广义乌龟坐标变换法(GTCT)则与此不同, 可以给出动态黑

洞视界位置与温度的准确结果,而且它不受球对称的限制,原则上适用于任何动态黑洞.这个方法将静态或稳态情形下的普通乌龟坐标$r_* = r + (2\kappa)^{-1}\ln(r - r_H)$推广到非静态或非稳态情形,但允许视界的位置$r_H$可以是超前时间$v = t + r_*$和/或角度$\theta$, φ的函数,就可以把黑洞背景上的Klein-Gordon方程或Dirac方程在视界附近化成标准的波动方程.引入乌龟坐标r_*的一个关键点是必须基于所要考虑的时空的对称性.例如,Schwarzschild黑洞的事件视界$r_H = 2M$是一个常数,而Vaidya-型时空的视界位置$r_H = r_H(v)$是超前时间v的函数.广义乌龟坐标变换法已成功地用于考察动态轴对称黑洞中标量粒子的热辐射[319–322].非静态的球对称黑洞中的Dirac粒子的Hawking效应也用此法获得了较多的研究[51].

但是用GTCT方法去讨论动态轴对称黑洞中Dirac粒子的Hawking蒸发时遇到了较大的麻烦.困难在于在动态轴对称时空中不能把Chandrasekhar-Dirac方程按径向变量和角向变量完全分离成两个部分.在前一章中,我们已指出广义乌龟坐标变换法并不要求对场方程事先进行分离变量处理,因而给我们提供了用这一方法去研究动态轴对称黑洞中Dirac粒子的Hawking辐射的可能性.我们用这一方法考察了动态Kerr 黑洞中Dirac粒子的Hawking效应,研究表明,只有同时考虑一阶方程和二阶方程在理论上才是完全自洽的.考虑一阶方程在视界附近的渐近行为不仅是必要的,而且还是必须的,否则就不可能获得成功的处理.

下面用推广了的GTCT方法研究动态Kerr黑洞中Dirac粒子的量子热效应.首先利用Newman-Penrose(NP)表述在变质量的Kerr时空中写出Dirac方程明显形式,然后同时考虑一阶Dirac方程和二阶Dirac方程在视界附近的渐近行为,为此目的需要采用在上一节中根据时空对称性引入的广义乌龟坐标变换(7.1.6).

由一阶方程中一阶导数项的系数行列式为零可推导出视界面方程.利用Dirac旋量分量的一阶导数项之间的关系式,可以消去二阶方程中的一阶导数之间的交叉项,这一步是处理中的关键.然后通过调节在广义乌龟坐标变换中引入的参数κ,就可以把每一个分量满足的二阶方程在视界附近化为单一分量的标准波动方程,同时可以得到Hawking温度的精确表达式.最后的步骤为在分离变量后用DRS方案导出动态Kerr时空中Dirac粒子的热辐射Fermi谱.我们发现Dirac粒子的黑体辐射谱中有一项新的剩余的自旋-转动耦合效应,该效应依赖于黑洞的转动与Dirac粒子的自旋之间的相互作用.

动态Kerr黑洞的度规已由上一节中的(7.1.1)式给出,其中$\Sigma = \rho^*\rho$, $\rho = r - ia\cos\theta$, $\rho^* = r + ia\cos\theta$为$\rho$的复共轭.为了在NP表述中写出Dirac方程在动态Kerr黑洞中的明显形式,我们选取一个复的零标架系$\{\mathbf{l}, \mathbf{n}, \mathbf{m}, \overline{\mathbf{m}}\}$使之满足伪正

交关系$\mathbf{l}\cdot\mathbf{n}=-\mathbf{m}\cdot\overline{\mathbf{m}}=1$. 因此协变的1-形式基可写为类Kinnersley形式如下

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{l}=dv-a\sin^2\theta d\varphi\,,\quad \mathbf{n}=\frac{\Delta}{2\Sigma}\big(dv-a\sin^2\theta d\varphi\big)-dr\,,\\
&\mathbf{m}=\frac{1}{\sqrt{2}\rho^*}\big\{i\sin\theta[adv-(r^2+a^2)d\varphi]-\Sigma d\theta\big\}\,,\\
&\overline{\mathbf{m}}=\frac{1}{\sqrt{2}\rho}\big\{-i\sin\theta[adv-(r^2+a^2)d\varphi]-\Sigma d\theta\big\}\,,
\end{aligned}
\tag{7.2.1}
$$

对应的方向导数为

$$
\begin{aligned}
&D=-\partial_r\,,\quad \underline{\Delta}=\frac{r^2+a^2}{\Sigma}\partial_v+\frac{\Delta}{2\Sigma}\partial_r+\frac{a}{\Sigma}\partial_\varphi\,,\\
&\delta=\frac{1}{\sqrt{2}\rho^*}\big(ia\sin\theta\partial_v+\partial_\theta+\frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi\big)\,,\\
&\overline{\delta}=\frac{1}{\sqrt{2}\rho}\big(-ia\sin\theta\partial_v+\partial_\theta-\frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi\big)\,.
\end{aligned}
\tag{7.2.2}
$$

不难算得上述零标架系中的12个复NP旋系数如下:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\kappa}=\tilde{\lambda}=\sigma=0\,,\quad \tilde{\rho}=\frac{1}{\rho^*}\,,\quad \epsilon=-\frac{ia\cos\theta}{\Sigma}\,,\quad \gamma=\frac{r\Delta}{2\Sigma^2}-\frac{r-M}{2\Sigma}\,,\\
&\mu=\frac{\Delta}{2\Sigma\rho^*}\,,\quad \tau=\frac{ia\sin\theta}{\sqrt{2}\rho^{*2}}\,,\quad \nu=\frac{\dot{M}ria\sin\theta}{\sqrt{2}\Sigma\rho}\,,\\
&\alpha=\tilde{\pi}-\beta^*\,,\quad \tilde{\pi}=-\frac{ia\sin\theta}{\sqrt{2}\Sigma}\,,\quad \beta=\frac{\cot\theta}{2\sqrt{2}\rho^*}+\frac{ira\sin\theta}{\sqrt{2}\Sigma\rho^*}\,.
\end{aligned}
\tag{7.2.3}
$$

将所需的旋系数插入Newman-Penrose表述中的四个耦合的Chandrasekhar-Dirac 方程[5]

$$
\begin{aligned}
&(D+\epsilon-\tilde{\rho})F_1+(\overline{\delta}+\tilde{\pi}-\alpha)F_2=\frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}G_1\,,\\
&(\underline{\Delta}+\mu-\gamma)F_2+(\delta+\beta-\tau)F_1=\frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}G_2\,,\\
&(D+\epsilon^*-\tilde{\rho}^*)G_2-(\delta+\tilde{\pi}^*-\alpha^*)G_1=\frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}F_2\,,\\
&(\underline{\Delta}+\mu^*-\gamma^*)G_1-(\overline{\delta}+\beta^*-\tau^*)G_2=\frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}F_1\,,
\end{aligned}
\tag{7.2.4}
$$

式中μ_0为Dirac粒子的质量, 我们可以得到

$$
\begin{aligned}
-(\partial_r + \frac{r}{\Sigma})F_1 + \frac{1}{\sqrt{2}\rho}(\mathcal{L}_{1/2} - \frac{ira\sin\theta}{\Sigma})F_2 &= \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}G_1\,,\\
\frac{\Delta}{2\Sigma}(\mathcal{D}_{1/2} - \frac{ia\cos\theta}{\Sigma})F_2 + \frac{1}{\sqrt{2}\rho^*}(\mathcal{L}^\dagger_{1/2} - \frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{\Sigma})F_1 &= \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}G_2\,,\\
-(\partial_r + \frac{r}{\Sigma})G_2 - \frac{1}{\sqrt{2}\rho^*}(\mathcal{L}^\dagger_{1/2} + \frac{ira\sin\theta}{\Sigma})G_1 &= \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}F_2\,,\\
\frac{\Delta}{2\Sigma}(\mathcal{D}_{1/2} + \frac{ia\cos\theta}{\Sigma})G_1 - \frac{1}{\sqrt{2}\rho}(\mathcal{L}_{1/2} - \frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{\Sigma})G_2 &= \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}F_1\,, \qquad (7.2.5)
\end{aligned}
$$

其中已定义了如下的算符

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_{1/2} &= \partial_r + \Delta^{-1}\big[r - M + 2a\partial_\varphi + 2(r^2+a^2)\partial_v\big]\,,\\
\mathcal{L}_n &= \partial_\theta + n\cot\theta - \frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi - ia\sin\theta\partial_v\,,\\
\mathcal{L}^\dagger_n &= \partial_\theta + n\cot\theta + \frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi + ia\sin\theta\partial_v\,.
\end{aligned}
$$

方程(7.2.5)在作代换$F_1 = \frac{1}{\sqrt{2\Sigma}}P_1$, $F_2 = \frac{\rho}{\sqrt{\Sigma}}P_2$, $G_1 = \frac{\rho^*}{\sqrt{\Sigma}}Q_1$, $G_2 = \frac{1}{\sqrt{2\Sigma}}Q_2$后可化成为

$$
\begin{aligned}
-\partial_r P_1 + \mathcal{L}_{1/2}P_2 = i\mu_0\rho^*Q_1\,, &\qquad \Delta\mathcal{D}_{1/2}P_2 + \mathcal{L}^\dagger_{1/2}P_1 = i\mu_0\rho^*Q_2\,,\\
-\partial_r Q_2 - \mathcal{L}^\dagger_{1/2}Q_1 = i\mu_0\rho P_2\,, &\qquad \Delta\mathcal{D}_{1/2}Q_1 - \mathcal{L}_{1/2}Q_2 = i\mu_0\rho P_1\,. \qquad (7.2.6)
\end{aligned}
$$

除在Kerr黑洞(M为常数)或Vaidya-型时空($a = 0$)情形外, 方程(7.2.6) 不能退耦. 但是对于处理Hawking辐射问题, 人们只需关心方程(7.2.6)在视界附近的渐近行为. 当我们将(Q_1, Q_2)分别与$(P_2^*, -P_1^*)$等同时, 发现方程(7.2.6)仍可被满足, 因此我们只需处理一对分量(P_1, P_2)即可.

采用前节中引入的广义乌龟坐标变换(7.1.6), 可将方程(7.2.6)中的前一对在视界附近化为

$$
\begin{aligned}
(r_{H,\theta} + ia\sin\theta_0 r_{H,v})\frac{\partial}{\partial r_*}P_1 - \big[\Delta_H - 2(r_H^2+a^2)r_{H,v}\big]\frac{\partial}{\partial r_*}P_2 &= 0\,,\\
\frac{\partial}{\partial r_*}P_1 + (r_{H,\theta} - ia\sin\theta_0 r_{H,v})\frac{\partial}{\partial r_*}P_2 &= 0\,, \qquad (7.2.7)
\end{aligned}
$$

式中$r_{H,v} = \partial r_H/\partial v$为事件视界对时间的变化率, $r_{H,\theta} = \partial r_H/\partial\theta$为其沿角度$\theta$方向的变化率, $\Delta_H = r_H^2 - 2M(v_0)r_H + a^2$.

如果方程(7.2.7)中的导数$\frac{\partial}{\partial r_*}P_1$和$\frac{\partial}{\partial r_*}P_2$不为零, P_1和P_2 有非平凡解的存在条件是其一阶导数项的系数行列式为零, 这给出下述视界面方程

$$\Delta_H - 2(r_H^2 + a^2) r_{H,v} + a^2 \sin^2\theta_0 r_{H,v}^2 + r_{H,\theta}^2 = 0\,. \tag{7.2.8}$$

对于(Q_1, Q_2)分量也存在类似于式(7.2.7)的关系式, 类似地从它们可导出(7.2.8)式.

现在考察Dirac方程的二阶形式在视界附近的渐近行为. 经直接计算可得二阶Dirac方程如下:

$$\begin{aligned}
&\big(\Delta\mathcal{D}_{1/2}\partial_r + \mathcal{L}_{1/2}\mathcal{L}_{1/2}^\dagger - \mu_0^2\Sigma\big)P_1 = \mu_0(a\sin\theta Q_2 - i\Delta Q_1) \\
&\qquad\qquad -ia\sin\theta\big(2\dot{M}r\partial_r + \dot{M}\big)P_2\,, \\
&\big(\partial_r\Delta\mathcal{D}_{1/2} + \mathcal{L}_{1/2}^\dagger\mathcal{L}_{1/2} - \mu_0^2\Sigma\big)P_2 = \mu_0(a\sin\theta Q_1 + iQ_2)\,,
\end{aligned} \tag{7.2.9}$$

它们的明显表达式为

$$\begin{aligned}
&\big[\Delta\partial_r^2 + 2(r^2+a^2)\partial_{vr}^2 + 2a\partial_{r\varphi}^2 + 2a\partial_{v\varphi}^2 + a^2\sin^2\theta\partial_v^2 + \partial_\theta^2 + \cot\theta\partial_\theta - \mu_0^2\Sigma \\
&\quad + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 - \frac{i\cos\theta}{\sin^2\theta}\partial_\varphi + ia\cos\theta\partial_v + (r-M)\partial_r - \frac{1}{4\sin^2\theta} - \frac{1}{4}\big]P_1 \\
&\quad = \mu_0(a\sin\theta Q_2 - i\Delta Q_1) - ia\sin\theta\big(2\dot{M}r\partial_r + \dot{M}\big)P_2
\end{aligned} \tag{7.2.10}$$

和

$$\begin{aligned}
&\big[\Delta\partial_r^2 + 2(r^2+a^2)\partial_{vr}^2 + 2a\partial_{r\varphi}^2 + 2a\partial_{v\varphi}^2 + a^2\sin^2\theta\partial_v^2 + \partial_\theta^2 + \cot\theta\partial_\theta - \mu_0^2\Sigma \\
&\quad + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 + \frac{i\cos\theta}{\sin^2\theta}\partial_\varphi + (4r - ia\cos\theta)\partial_v + 3(r-M)\partial_r - \frac{1}{4\sin^2\theta} + \frac{3}{4}\big]P_2 \\
&\quad = \mu_0(a\sin\theta Q_1 + iQ_2)\,.
\end{aligned} \tag{7.2.11}$$

经过冗长的计算, 方程(7.2.10)和(7.2.11)在作上一节中引入的广义乌龟坐标变换(7.1.6)并取$r \to r_H(v_0, \theta_0)$, $v \to v_0$和$\theta \to \theta_0$ 的极限后变成

$$\begin{aligned}
&\Big\{\big[\frac{A}{2\kappa} + 2\Delta_H - 2r_{H,v}(r_H^2 + a^2)\big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + 2(r_H^2 + a^2 - r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0)\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*} \\
&\quad -2r_{H,\theta}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*} + 2a(1 - r_{H,v})\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi} - [A - (r_H - M) + ia\cos\theta_0 r_{H,v} \\
&\quad + r_{H,\theta}\cot\theta_0 + r_{H,\theta\theta} + r_{H,vv}a^2\sin^2\theta_0]\frac{\partial}{\partial r_*}\Big\}P_1 = -2i\dot{M}r_H a\sin\theta_0\frac{\partial}{\partial r_*}P_2
\end{aligned} \tag{7.2.12}$$

和

$$\begin{aligned}
&\Big\{\big[\frac{A}{2\kappa} + 2\Delta_H - 2r_{H,v}(r_H^2 + a^2)\big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + 2(r_H^2 + a^2 - r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0)\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*} \\
&\quad -2r_{H,\theta}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*} + 2a(1 - r_{H,v})\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi} - [A - 3(r_H - M) + r_{H,\theta}\cot\theta_0 \\
&\quad + (4r_H - ia\cos\theta_0)r_{H,v} + r_{H,\theta\theta} + r_{H,vv}a^2\sin^2\theta_0]\frac{\partial}{\partial r_*}\Big\}P_2 = 0\,.
\end{aligned} \tag{7.2.13}$$

将上节中求得的系数$A = 2(r_H - M) - 4r_Hr_{H,v}$代入方程(7.2.12) 和(7.2.13), 并且利用关系式(7.2.7)中的第一个去换掉方程(7.2.12)右边的一阶导数项$\frac{\partial}{\partial r_*}P_2$后, 可以得到

$$\begin{aligned}
&\Big\{\Big[\frac{r_H(1-2r_{H,v})-M}{\kappa}+2\Delta_H-2r_{H,v}(r_H^2+a^2)\Big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}\\
&+2(r_H^2+a^2-r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0)\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}-2r_{H,\theta}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}\\
&+2a(1-r_{H,v})\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi}-(r_H-M-4r_Hr_{H,v}\\
&+ia\cos\theta_0r_{H,v}+r_{H,\theta}\cot\theta_0+r_{H,\theta\theta}+r_{H,vv}a^2\sin^2\theta_0)\frac{\partial}{\partial r_*}\Big\}P_1\\
&=-2i\dot{M}r_Ha\sin\theta_0\frac{r_{H,\theta}+ia\sin\theta_0r_{H,v}}{\Delta_H-2(r_H^2+a^2)r_{H,v}}\frac{\partial}{\partial r_*}P_1
\end{aligned}\tag{7.2.14}$$

和

$$\begin{aligned}
&\Big\{\Big[\frac{r_H(1-2r_{H,v})-M}{\kappa}+2\Delta_H-2r_{H,v}(r_H^2+a^2)\Big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}\\
&+2(r_H^2+a^2-r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0)\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}-2r_{H,\theta}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}\\
&+2a(1-r_{H,v})\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi}-(M-r_H-ia\cos\theta_0r_{H,v}\\
&+r_{H,\theta}\cot\theta_0+r_{H,\theta\theta}+r_{H,vv}a^2\sin^2\theta_0)\frac{\partial}{\partial r_*}\Big\}P_2=0\,.
\end{aligned}\tag{7.2.15}$$

采用上节中用过的调节参数κ的方案, 可使方程(7.2.14)和(7.2.15)在视界附近化成标准形式的波动方程

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}+2\Omega_H\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi}+2C_3\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}+2(C_2+iC_1)\frac{\partial}{\partial r_*}\Big]\Psi=0\,,\tag{7.2.16}$$

式中Ω_H和C_3已在上节中给出, 而实系数C_2和C_1分别为:

对于$\Psi = P_1$,

$$\begin{aligned}
C_2&=\frac{-1}{2(r_H^2+a^2-r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0)}\Big[r_H(1-4r_{H,v})-M+r_{H,\theta\theta}\\
&\qquad+r_{H,vv}a^2\sin^2\theta_0+r_{H,\theta}\cot\theta_0+\frac{2\dot{M}r_Hr_{H,v}a^2\sin^2\theta_0}{\Delta_H-2r_{H,v}(r_H^2+a^2)}\Big]\,,\\
C_1&=\frac{1}{2(r_H^2+a^2-r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0)}\Big[-r_{H,v}a\cos\theta_0\\
&\qquad+\frac{2\dot{M}r_Hr_{H,\theta}a\sin\theta_0}{\Delta_H-2r_{H,v}(r_H^2+a^2)}\Big]\,;
\end{aligned}\tag{7.2.17}$$

对于$\Psi = P_2$,

$$C_2 = -\frac{M - r_H + r_{H,\theta\theta} + r_{H,vv}a^2\sin^2\theta_0 + r_{H,\theta}\cot\theta_0}{2(r_H^2 + a^2 - r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0)},$$
$$C_1 = \frac{r_{H,v}a\cos\theta_0}{2(r_H^2 + a^2 - r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0)}. \tag{7.2.18}$$

方程(7.2.16)经分离变量$\Psi = R(r_*)\Theta(\theta_*)e^{i(m\varphi-\omega v_*)}$后退耦为径向部分和角向部分

$$R'' + 2i(-iC_0 + C_1 + m\Omega_H - \omega)R' = 0, \qquad \Theta' = \lambda\Theta, \tag{7.2.19}$$

式中λ为分离变量过程中引入的一个实常数, $C_0 = \lambda C_3 + C_2$. 方程(7.2.19)的解为

$$R = R_1 e^{2[i(\omega-m\Omega_H-C_1)-C_0]r_*} + R_0, \qquad \Theta = e^{\lambda\theta_*}. \tag{7.2.20}$$

显然方程(7.2.16)的入射波解和出射波解为

$$\Psi^{\rm in} = e^{-i\omega v_* + im\varphi + \lambda\theta_*},$$
$$\Psi^{\rm out}(r > r_H) = e^{-i\omega v_* + im\varphi + \lambda\theta_*}e^{2[i(\omega-m\Omega_H-C_1)-C_0]r_*}. \tag{7.2.21}$$

将非正则的出射波解$\Psi^{\rm out}(r > r_H)$沿下半复r-平面解析延拓为

$$\widetilde{\Psi^{\rm out}}(r < r_H) = \Psi^{\rm out}(r > r_H)e^{i\pi C_0/\kappa}e^{\pi(\omega-m\Omega_H-C_1)/\kappa}. \tag{7.2.22}$$

按照Damour-Ruffini-Sannan的方法, 容易得到Dirac粒子在视界上的相对散射几率和热辐谱为

$$\left|\frac{\Psi^{\rm out}}{\widetilde{\Psi^{\rm out}}}\right|^2 = e^{-2\pi(\omega-m\Omega_H-C_1)/\kappa},$$
$$\langle\mathcal{N}_\omega\rangle \simeq \frac{1}{e^{(\omega-m\Omega_H-C_1)/T_H}+1}, \qquad T_H = \frac{\kappa}{2\pi}. \tag{7.2.23}$$

本节导出的动态Kerr黑洞的视界位置和Hawking温度与上节给出的结果完全一致, 它们不仅依赖于超前时间v ,而且随角度θ变化. 在Dirac粒子的热辐射谱(7.2.23)中出现了一个剩余的项C_1, 这一项不存在于Klein-Gordon 标量场的热辐射谱(7.1.21)中. 当黑洞不转动($a = 0$)或是处于稳态情形($r_{H,v} = r_{H,\theta} = 0$), C_1也为零. 而且对于Dirac粒子的两个不同的自旋手征态(P_1, P_2), C_1的表达式也不一样. 如果忽略与$r_{H,\theta}$有关的项的话, 我们发现它与旋量粒子的自旋量子数$p = \pm 1/2$成比例. 因此这一项新的效应可能起源于Dirac粒子的自旋与蒸发黑洞的转动之间的相互作用. 我们称这种效应为自旋-转动耦合效应.

在这一节中，我们已成功地处理了动态Kerr黑洞中的Chandrasekhar-Dirac方程. 在广义乌龟坐标变换下，每一个分量满足的二阶方程在视界附近均能化成波动方程的标准形式. 在上面的讨论中最关键的一步是考虑了一阶方程在视界附近的渐近形式，并且得到联系不同分量的一阶导数之间的关系式，它使我们能消去二阶方程中的一阶导数的交叉项. 在Dirac粒子的热辐射谱有一项新的效应，是Klein-Gordon 粒子的热谱所没有的. 这个新的自旋-转动耦合效应暗示了动态Kerr黑洞可能存在新的量子转动能层效应.

§7.3 动态Kerr黑洞中光子的Hawking辐射

本节用完全类似于上节中用过的广义乌龟坐标变换法研究变质量Kerr黑洞中光子的Hawking蒸发，表明光子的黑体辐射谱展示了一项新的依赖于光子不同手征态的自旋-转动耦合效应.

在上节中我们已指出，研究动态轴对称黑洞中Dirac粒子的Hawking蒸发的主要困难在于不能把Chandrasekhar-Dirac方程分离变量成为径向和角向两个部分. 能摆脱这个困境的办法是同时考虑Dirac方程的一阶形式和二阶形式在视界附近的渐近行为，然后利用一阶导数之间的关系式消去二阶方程中一阶导数之间的交叉项，使得每个分量的二阶方程成为单一分量的波方程，并且在视界附近化成标准形式的波方程. 在Dirac粒子的热辐射谱中观察到了一项新的相互作用效应，该效应起源于Dirac粒子的自旋与蒸发的Kerr黑洞的转动之间的耦合. 这个自旋-转动耦合效应的特征是它明显依赖于自旋为1/2粒子的不同手征态. 当动态Kerr时空退化为Vaidya-型球对称黑洞时，这项效应就消失了.

这一节研究动态Kerr时空中光子的热辐射. 我们首先考虑Maxwell方程的一阶形式和二阶形式在视界附近的渐近行为，然后利用Maxwell场的三个Newman-Penrose复标量的一阶导数之间的关系式去消除二阶方程中的一阶导数之间的交叉项，并把每一个二阶方程在视界附近化成标准的波方程. 同样地，光子的黑体辐射谱也展示了一个自旋-转动耦合效应，它来自光子的自旋与辐射的Kerr黑洞的角动量之间的相互作用.

现在我们考虑动态Kerr时空中无源的Maxwell方程. 当忽略自旋为1的无质量场对该时空的反作用时，场方程就由该背景时空中的Maxwell方程给出. 在Newman-Penrose 表述[5, 230]中，无源的Maxwell方程表为

$$
\begin{aligned}
&(D-2\tilde{\rho})\phi_1-(\overline{\delta}+\tilde{\pi}-2\alpha)\phi_0=-\tilde{\kappa}\phi_2\,,\\
&(\delta-2\tau)\phi_1-(\underline{\Delta}+\mu-2\gamma)\phi_0=-\sigma\phi_2\,,\\
&(D+2\epsilon-\tilde{\rho})\phi_2-(\overline{\delta}+2\tilde{\pi})\phi_1=-\tilde{\lambda}\phi_0\,,\\
&(\delta+2\beta-\tau)\phi_2-(\underline{\Delta}+2\mu)\phi_1=-\nu\phi_0\,. \qquad (7.3.1)
\end{aligned}
$$

为了写出它们在动态Kerr时空中的明显形式, 我们采用上节中建立的复零标架, 并插入所需的NP自旋系数后得到

$$
\begin{aligned}
(\partial_r+\frac{2}{\rho^*})\phi_1+\frac{1}{\sqrt{2}\rho}(\mathcal{L}_1-\frac{ia\sin\theta}{\rho})\phi_0 &= 0\,,\\
\frac{\Delta}{2\Sigma}(\mathcal{D}_1-\frac{1}{\rho})\phi_0-\frac{1}{\sqrt{2}\rho^*}(\mathcal{L}_0^\dagger-\frac{2ia\sin\theta}{\rho^*})\phi_1 &= 0\,,\\
(\partial_r+\frac{1}{\rho})\Phi_2+\frac{1}{\sqrt{2}\rho}(\mathcal{L}_0-\frac{2ia\sin\theta}{\rho^*})\phi_1 &= 0\,,\\
\frac{\Delta}{2\Sigma}(\mathcal{D}_0+\frac{2}{\rho^*})\phi_1-\frac{1}{\sqrt{2}\rho^*}(\mathcal{L}_1^\dagger+\frac{ia\sin\theta}{\rho})\phi_2 &= \frac{\dot{M}ria\sin\theta}{\sqrt{2}\Sigma\rho}\phi_0\,. \qquad (7.3.2)
\end{aligned}
$$

在方程(7.3.2)中进一步作代换$\Phi_0=\frac{\rho^*}{\sqrt{2}\rho}\phi_0$, $\Phi_1=\rho^*\phi_1$, $\Phi_2=\sqrt{2}\Sigma\phi_2$后有

$$
\begin{aligned}
(\partial_r+\frac{1}{\rho^*})\Phi_1+(\mathcal{L}_1+\frac{ia\sin\theta}{\rho^*})\Phi_0 &= 0\,,\\
\Delta(\mathcal{D}_1-\frac{1}{\rho^*})\Phi_0-(\mathcal{L}_0^\dagger-\frac{ia\sin\theta}{\rho^*})\Phi_1 &= 0\,,\\
(\partial_r-\frac{1}{\rho^*})\Phi_2+(\mathcal{L}_0-\frac{ia\sin\theta}{\rho^*})\Phi_1 &= 0\,,\\
\Delta(\mathcal{D}_0+\frac{1}{\rho^*})\Phi_1-(\mathcal{L}_1^\dagger+\frac{ia\sin\theta}{\rho^*})\Phi_2 &= 2\dot{M}ria\sin\theta\Phi_0\,, \qquad (7.3.3)
\end{aligned}
$$

式中算符$\mathcal{L}_n$和$\mathcal{L}_n^\dagger$的定义与上一节一致, 算符$\mathcal{D}_n$的定义如下:

$$
\mathcal{D}_n=\partial_r+\frac{2}{\Delta}\left[n(r-M)+a\partial_\varphi+(r^2+a^2)\partial_v\right].
$$

除非在稳态Kerr黑洞情形(M为常数)或者是Vaidya-型黑洞情形, 方程(7.3.3)是不能退耦的. 但是对于处理Hawking辐射问题, 我们只需关心Maxwell场方程在视界附近的渐近行为即可. 为此我们同时考虑一阶的和二阶的Maxwell方程在视界附近的渐近形式.

首先让我们考虑方程(7.3.3)在视界附近的极限形式. 在第一节引入的广义乌龟坐标变换(7.1.6)下, 并取$r \to r_H(v_0, \theta_0)$, $v \to v_0$和$\theta \to \theta_0$极限后, 方程(7.3.3)化为下述形式

$$
\begin{aligned}
\left[\Delta_H - 2(r_H^2 + a^2)r_{H,v}\right]\frac{\partial}{\partial r_*}\Phi_0 + \left(r_{H,\theta} + ia\sin\theta_0 r_{H,v}\right)\frac{\partial}{\partial r_*}\Phi_1 = 0\,, \\
\frac{\partial}{\partial r_*}\Phi_1 - \left(r_{H,\theta} - ia\sin\theta_0 r_{H,v}\right)\frac{\partial}{\partial r_*}\Phi_0 = 0\,, \\
\left[\Delta_H - 2(r_H^2 + a^2)r_{H,v}\right]\frac{\partial}{\partial r_*}\Phi_1 + \left(r_{H,\theta} + ia\sin\theta_0 r_{H,v}\right)\frac{\partial}{\partial r_*}\Phi_2 = 0\,, \\
\frac{\partial}{\partial r_*}\Phi_2 - \left(r_{H,\theta} - ia\sin\theta_0 r_{H,v}\right)\frac{\partial}{\partial r_*}\Phi_1 = 0\,.
\end{aligned} \qquad (7.3.4)
$$

如果方程(7.3.4)中的导数$\frac{\partial}{\partial r_*}\Phi_0$, $\frac{\partial}{\partial r_*}\Phi_1$和$\frac{\partial}{\partial r_*}\Phi_2$ 不为零的话, 那么Φ_0, Φ_1和Φ_2有非平凡解的存在条件是方程(7.3.4)中的两组方程的行列式为零, 这正好给出前两节中导出的视界面方程. 稍后我们将会看到关系式(7.3.4)在消去二阶方程中的一阶导数交叉项的过程中起着关键的作用.

其次我们转而考虑Maxwell方程的二阶形式. 直接但稍为冗长的计算给出

$$
\begin{aligned}
&\left(\partial_r \Delta \mathcal{D}_1 + \mathcal{L}_0^\dagger \mathcal{L}_1 + 2\rho\partial_v\right)\Phi_0 = 0\,, \\
&\left(\partial_r \Delta \mathcal{D}_0 + \mathcal{L}_1^\dagger \mathcal{L}_0 - 2\rho\partial_v + \frac{2M\rho}{\rho^{*2}}\right)\Phi_1 \\
&\quad \equiv \left(\Delta \mathcal{D}_1 \partial_r + \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_0^\dagger + 2\rho\partial_v + \frac{2M\rho}{\rho^{*2}}\right)\Phi_1 \\
&\quad = 2ia\sin\theta\left[\dot{M}r(\partial_r - \frac{1}{\rho^*}) + \dot{M}\right]\Phi_0\,, \\
&\left(\Delta \mathcal{D}_0 \partial_r + \mathcal{L}_0 \mathcal{L}_1^\dagger - 2\rho\partial_v\right)\Phi_2 \\
&\quad = -2\ddot{M}ra^2\sin^2\theta\Phi_0 - 4\dot{M}ria\sin\theta\mathcal{L}_1\Phi_0\,.
\end{aligned} \qquad (7.3.5)
$$

对方程(7.3.5)作类似的广义乌龟坐标变换处理后, 我们得到

$$
\begin{aligned}
&\Big\{\Big[\frac{r_H(1 - 2r_{H,v}) - M}{\kappa} + 2\Delta_H - 2r_{H,v}(r_H^2 + a^2)\Big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2} \\
&\quad + 2(r_H^2 + a^2 - r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0)\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*} - 2r_{H,\theta}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*} \\
&\quad + 2a(1 - r_{H,v})\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi} - \big[2(M - r_H) + 2(r_H - ia\cos\theta_0)r_{H,v} \\
&\quad + r_{H,\theta}\cot\theta_0 + r_{H,\theta\theta} + r_{H,vv}a^2\sin^2\theta_0\big]\frac{\partial}{\partial r_*}\Big\}\Phi_0 = 0
\end{aligned} \qquad (7.3.6)
$$

和

$$
\begin{aligned}
&\Big\{\Big[\frac{r_H(1-2r_{H,v})-M}{\kappa}+2\Delta_H-2r_{H,v}(r_H^2+a^2)\Big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}\\
&+2(r_H^2+a^2-r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0)\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}-2r_{H,\theta}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}\\
&+2a(1-r_{H,v})\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi}-\big(-2r_Hr_{H,v}+r_{H,\theta}\cot\theta_0\\
&+r_{H,\theta\theta}+r_{H,vv}a^2\sin^2\theta_0\big)\frac{\partial}{\partial r_*}\Big\}\Phi_1\\
&\quad=-2\dot{M}r_Hia\sin\theta_0\frac{r_{H,\theta}+ia\sin\theta_0r_{H,v}}{\Delta_H-2(r_H^2+a^2)r_{H,v}}\frac{\partial}{\partial r_*}\Phi_1\,;
\end{aligned}
\tag{7.3.7}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&\Big\{\Big[\frac{r_H(1-2r_{H,v})-M}{\kappa}+2\Delta_H-2r_{H,v}(r_H^2+a^2)\Big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}\\
&+2(r_H^2+a^2-r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0)\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}-2r_{H,\theta}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}\\
&+2a(1-r_{H,v})\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi}-\big[2(r_H-M)+r_{H,\theta}\cot\theta_0\\
&+2(-3r_H+ia\cos\theta_0)r_{H,v}+r_{H,\theta\theta}+r_{H,vv}a^2\sin^2\theta_0\big]\frac{\partial}{\partial r_*}\Big\}\Phi_2\\
&=-4\dot{M}r_Hia\sin\theta_0\frac{r_{H,\theta}+ia\sin\theta_0r_{H,v}}{\Delta_H-2(r_H^2+a^2)r_{H,v}}\frac{\partial}{\partial r_*}\Phi_2\,,
\end{aligned}
\tag{7.3.8}
$$

其中已利用了关系式(7.3.4)换掉了方程(7.3.7)和(7.3.8) 中的一阶导数项$\frac{\partial}{\partial r_*}\Phi_0$. 在计算过程中, 还用了L'Hôsptial法则处理了一项0/0-型不定式A, 并已将$A=2r_H(1-2r_{H,v})-2M$代入了方程(7.3.6-7.3.8)之中.

为了将方程(7.3.6)、(7.3.7)和(7.3.8)在视界附近化为标准形式的波方程, 我们如上节一样调节参数κ, 使这些方程可纳入一个统一的形式如下:

$$
\Big[\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}+2\Omega_H\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi}+2C_3\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}+2(C_2+iC_1)\frac{\partial}{\partial r_*}\Big]\Psi_p=0\,,\tag{7.3.9}
$$

式中蒸发的Kerr黑洞视界处的角速度Ω_H和系数C_3已在前两节中给出, 而系数C_1和C_2均为实的,

$$
\begin{aligned}
C_2+iC_1 \;=\; &\frac{-1}{2(r_H^2+a^2-r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0)}\Big[2p(r_H-M+ia\cos\theta_0r_{H,v})\\
&-2(2p+1)r_Hr_{H,v}+r_{H,\theta}\cot\theta_0+r_{H,\theta\theta}+r_{H,vv}a^2\sin^2\theta_0\\
&+2(s+p)\dot{M}r_Hia\sin\theta_0\frac{r_{H,\theta}+ia\sin\theta_0r_{H,v}}{\Delta_H-2r_{H,v}(r_H^2+a^2)}\Big]\,.
\end{aligned}
\tag{7.3.10}
$$

在方程(7.3.9)中, 对于光子$s=1$, 当$p=-1,\ 0,\ 1$时, Ψ_p分别代表Φ_0, Φ_1和Φ_2. 应指出的是方程(7.3.9)包含上节中已讨论过的Dirac粒子的波方程(7.2.16)作为特殊情形. 对于$s=1/2$, 当$p=-1/2,\ 1/2$ 时, Ψ_p分别为P_2, P_1.

对方程(7.3.9)的处理平行于上节中所用过的程序, 利用DRS方案可得光子从黑洞发射出来的Hawking热辐射谱为

$$\langle \mathcal{N}_\omega \rangle \simeq \frac{1}{e^{(\omega - m\Omega_H - C_1)/T_H} - 1}, \qquad T_H = \frac{\kappa}{2\pi}, \tag{7.3.11}$$

式中ω为光子的能量, m为角动量磁量子数. 表面引力κ的表达式已在前两节中明显给出.

热辐射谱分布(7.3.11)源于光子遵从的Bose-Einstein统计, 它表明黑洞就象黑体一样发射辐射. 该式表明在蒸发的Kerr黑洞中光子的能谱由两部分组成:

$$\begin{aligned} \omega_p \;=\;& \frac{a}{r_H^2 + a^2 - r_{H,v} a^2 \sin^2\theta_0}\Big[m(1 - r_{H,v}) - p\cos\theta_0 r_{H,v} \\ & + (s+p)\dot{M} r_H \frac{\sin\theta_0 r_{H,\theta}}{\Delta_H - 2r_{H,v}(r_H^2 + a^2)}\Big] = m\Omega_H + C_1, \end{aligned} \tag{7.3.12}$$

转动能$m\Omega_H$来源于光子的轨道角动量与黑洞的转动之间的耦合作用, 另一项C_1来自光子的内禀自旋与黑洞的角动量之间耦合. 从“自旋相关”项的明显表达式

$$C_1 = \frac{\Omega_H}{1 - r_{H,v}}\Big[-p\cos\theta_0 r_{H,v} + (s+p)\dot{M} r_H \frac{\sin\theta_0 r_{H,\theta}}{\Delta_H - 2r_{H,v}(r_H^2 + a^2)}\Big], \tag{7.3.13}$$

易看出在稳态Kerr黑洞情形(M为常数, $r_{H,v} = r_{H,\theta} = 0$)或Vaidya-型黑洞情形($a = r_{H,\theta} = 0,\ r_{H,v} \neq 0$), 这一项均消失. C_1项与光子处于不同自旋态的手征显性相关, 它刻划了一项新的源于光子自旋与蒸发黑洞的转动之间的相互作用效应.

在这一节中我们讨论了变质量Kerr黑洞中光子的Hawking效应, 导出了动态Kerr时空中光子的热辐射谱, 其中额外的一项C_1代表一个新的自旋-转动耦合效应, 它可能起源于光子的自旋与蒸发的Kerr黑洞的角动量之间的相互作用. 这种自旋-转动耦合效应的特征是它依赖于光子的不同手征态. 正如前节所指出的, 当黑洞是稳态的或者它不转动时, 这个效应就不存在了.

总之, 本节的研究证实了动态Kerr黑洞中高自旋粒子的热辐射谱显示了一项新的起源于粒子的内禀自旋与黑洞的转动之间的耦合效应. 自旋-转动耦合效应表明动态Kerr时空具有某些与稳态Kerr黑洞非常不同的新效应, 稳态Kerr黑洞或Vaidya-型球对称黑洞不可能具有这种效应.

§7.4 动态Kerr时空中的自旋-转动耦合效应

这一节首先导出辐射的Kerr时空中无质量标量场、中微子场和电磁场微扰所控制的无源波方程，再用广义乌龟坐标变换法研究该时空中自旋$s = 0$、1/2和1的无质量粒子的Hawking辐射. 在蒸发的Kerr时空中，自旋为$s = 1/2$, 1的无质量粒子的Hawking 热辐射谱展示了一项额外的来自粒子的自旋与黑洞的转动之间的相互作用. 这个效应的特征是它明显依赖于高自旋粒子的不同手征态[273].

按照经典黑洞物理学的观点，一个转动带电黑洞的总质量-能量可以划分为三个部分[55, 56]: 转动能, Coulomb电磁能以及后来被Smarr [84]重新阐释为表面能的不可约质量. 相应地，一个荷电粒子在带电的轴对称黑洞中的能量由电磁相互作用能和由于粒子的轨道角动量与黑洞的转动相互耦合的能量这两个部分组成. 除这两个成份之外，人们朴素地期望应该有其他形式的相互作用存在，例如来自黑洞的转动或加速与旋转粒子的内禀自旋之间的引力耦合相互作用[323]. 除非在系统的Hamilton量中手放进自旋-转动耦合项，或者在非相对论性近似下考虑高阶的自旋相对论性效应，这种愿望是不可能实现的，因为Hawking辐射谱表明在一个转动的稳态黑洞中是不可能有这类效应存在的. 熟知的稳态时空中各种粒子的热辐射谱由下式给出

$$\langle \mathcal{N}_\omega \rangle \simeq \frac{1}{\exp[(\omega - m\Omega_h - e\Phi_h)/T_h] \pm 1}, \tag{7.4.1}$$

式中的三个常数Ω_h, Φ_h和T_h分别为黑洞事件视界的角速度，电势和有效温度，而m为粒子的角动量磁量子数，e为粒子的电荷. 利用Damour-Ruffini和Sannan建议的方法，可以容易地从Kerr时空中的Teukolsky主方程导出热谱公式(7.4.1).

但是，如果人们去考虑动力学黑洞中高自旋粒子的Hawking辐射的话，情况就会有所不同了. 最近我们利用广义乌龟坐标变换法研究了变质量Kerr黑洞中Dirac粒子和光子的蒸发，在自旋为1/2和1粒子的热辐射谱中观察到有一种新的由Dirac粒子或光子的内禀自旋与辐射的Kerr黑洞的角动量耦合的相互作用效应. 这种自旋-转动耦合效应的特征是它明显依赖于旋转粒子的不同手征态. 当时空退化为Vaidya-型球对称黑洞时，这个效应就消失了. 需要指出的是，Klein-Gordon粒子的Bose-Einstein分布中不存在这种效应.

下面我们首先导出一个蒸发的Kerr黑洞中标量场、中微子场和电磁场的微扰波方程. 需注意的是，由于该时空属于Petrov II-型，关于稳态Kerr黑洞微扰的Teukolsky方案不能直接应用于动态Kerr黑洞的引力微扰分析. Vaidya时空

属于Petrov D-型, 该时空的Hawking效应已经在Teukolsky微扰论框架下研究过了[318]. 然后再用DRS-ZWC方法(推广的GTCT法)研究动态Kerr黑洞中自旋为0, 1/2和1的无质量粒子的Hawking辐射, 我们发现在旋转粒子的热辐射谱中出现了一项额外的相互作用能量, 它起源于粒子的内禀自旋与黑洞的转动之间的耦合. 当该时空退化为一个稳态Kerr 黑洞或是一个Vaidya-型球对称黑洞时, 该效应就消失了.

在本章第一节中, 我们已给出了描述辐射的Kerr黑洞在超前的EF坐标系中的度规形式(7.1.1), 其中$\Delta = r^2 - 2M(v)r + a^2$, $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta = \rho^*\rho$, $\rho = r - ia\cos\theta$, $\rho^* = r + ia\cos\theta$. 该线元是稳态Kerr解在动态情形中的一个自然推广.

为了导出蒸发的Kerr黑洞中标量场、中微子场和电磁场微扰方程, 我们选取一个复零标架, 其分量$[v, r, \theta, \varphi]$如下:

$$
\begin{aligned}
l^\mu &= -\delta_1^\mu\,, \quad n^\mu = \frac{r^2+a^2}{\Sigma}\delta_0^\mu + \frac{\Delta}{2\Sigma}\delta_1^\mu + \frac{a}{\Sigma}\delta_3^\mu\,,\\
m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}\rho^*}\big(ia\sin\theta\delta_0^\mu + \delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\big)\,,\\
\overline{m}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}\rho}\big(-ia\sin\theta\delta_0^\mu + \delta_2^\mu - \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\big)\,.
\end{aligned}
$$

在Newman-Penrose表述中, 对Weyl旋量η_0和η_1作代换$\chi_1 = \sqrt{2\Sigma}\eta_1$和$\chi_0 = \sqrt{\Sigma}\eta_0/\rho$; 对Maxwell 复标量$\phi_0$, ϕ_1和ϕ_2作代换$\Phi_0 = \rho^*\phi_0/(\sqrt{2}\rho)$, $\Phi_1 = \rho^*\phi_1$和$\Phi_2 = \sqrt{2}\Sigma\phi_2$, 然后把它们代入Weyl 方程和Maxwell方程中, 可得到下面的一阶方程:

对于Weyl中微子

$$
\partial_r\chi_1 + \mathcal{L}_{1/2}\chi_0 = 0\,, \qquad \Delta\mathcal{D}_{1/2}\chi_0 - \mathcal{L}_{1/2}^\dagger\chi_1 = 0\,; \tag{7.4.2}
$$

对于光子

$$
\begin{aligned}
&(\partial_r + 1/\rho^*)\Phi_1 + (\mathcal{L}_1 + ia\sin\theta/\rho^*)\Phi_0 = 0\,,\\
&\Delta(\mathcal{D}_1 - 1/\rho^*)\Phi_0 - (\mathcal{L}_0^\dagger - ia\sin\theta/\rho^*)\Phi_1 = 0\,,\\
&(\partial_r - 1/\rho^*)\Phi_2 + (\mathcal{L}_0 - ia\sin\theta/\rho^*)\Phi_1 = 0\,,\\
&\Delta(\mathcal{D}_0 + 1/\rho^*)\Phi_1 - (\mathcal{L}_1^\dagger + ia\sin\theta/\rho^*)\Phi_2 = 2i\dot{M}ra\sin\theta\Phi_0\,,
\end{aligned} \tag{7.4.3}
$$

其中我们定义了算符

$$\mathcal{D}_n = \partial_r + \frac{2}{\Delta}\left[n(r-M) + a\partial_\varphi + (r^2+a^2)\partial_v\right],$$
$$\mathcal{L}_n = \partial_\theta + n\cot\theta - \frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi - ia\sin\theta\partial_v,$$
$$\mathcal{L}_n^\dagger = \partial_\theta + n\cot\theta + \frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi + ia\sin\theta\partial_v.$$

除在稳态Kerr黑洞(M为常数)或Vaidya-型时空情形外, 方程(7.4.2)和(7.4.3)一般不能分离变量. 但是对于研究Hawking效应, 人们可以而且只需关心它们在视界附近的渐近行为. 为此, 基于所研究的时空具有关于φ-轴的对称性, 可以引入如下的广义乌龟坐标变换(GTCT)

$$r_* = r + \frac{1}{2\kappa}\ln\left[r - r_H(v,\theta)\right], \qquad v_* = v - v_0, \quad \theta_* = \theta - \theta_0, \tag{7.4.4}$$

式中$r_H = r_H(v,\theta)$是事件视界的位置, κ为可调节参数. 所有参数κ, v_0和θ_0在乌龟坐标变换下不变, v_0和θ_0标识黑洞的初始状态.

采用广义乌龟坐标变换(7.4.4)并取$r \to r_H(v_0,\theta_0)$, $v \to v_0$ 和$\theta \to \theta_0$极限后, 方程(7.4.2)和(7.4.3)可以化成如下形式

$$\frac{\partial\Psi_{p+1}}{\partial r_*} - \left(r_{H,\theta} - ia\sin\theta_0 r_{H,v}\right)\frac{\partial\Psi_p}{\partial r_*} = 0,$$
$$\left(r_{H,\theta} + ia\sin\theta_0 r_{H,v}\right)\frac{\partial\Psi_{p+1}}{\partial r_*} + \left[\Delta_H - 2(r_H^2+a^2)r_{H,v}\right]\frac{\partial\Psi_p}{\partial r_*} = 0. \tag{7.4.5}$$

当$p=-1/2,1/2(s=1/2)$时, Ψ_p代表Weyl旋量χ_0, χ_1; 当$p=-1,0,1(s=1)$时, Ψ_p则表示Maxwell标量Φ_0, Φ_1, Φ_2. 在上式中, 我们记$\Delta_H = r_H^2 - 2M(v_0)r_H + a^2$. 物理量$r_{H,v} = \partial_v r_H$和$r_{H,\theta} = \partial_\theta r_H$描述视界随时间和沿角度的变化率, 它们反映了在视界附近存在有量子转动能层.

显然Ψ_p有非平凡解的存在条件是方程(7.4.5)的行列式为零, 这给出事件视界面方程

$$\Delta_H - 2(r_H^2+a^2)r_{H,v} + a^2\sin^2\theta_0 r_{H,v}^2 + r_{H,\theta}^2 = 0. \tag{7.4.6}$$

该方程也可以从零曲面方程: $g^{\mu\nu}\partial_\mu F\partial_\nu F = 0$作类似的乌龟坐标变换处理得到.

从上面对一阶方程的处理可以看出, 我们可以得到确定动态Kerr黑洞的事件视界面方程(7.4.6). 另外, 在后面将会看到关系式(7.4.5)可用来消去二阶方程中

的一阶导数项, 使每一个分量满足的方程均化为单一分量的波动方程. 从一阶方程(7.4.2)和(7.4.3)出发, 可导出其对应的二阶方程如下:

$$(\partial_r \Delta \mathcal{D}_{1/2} + \mathcal{L}_{1/2}^{\dagger}\mathcal{L}_{1/2})\chi_0 = 0\,,$$
$$(\Delta \mathcal{D}_{1/2}\partial_r + \mathcal{L}_{1/2}\mathcal{L}_{1/2}^{\dagger})\chi_1 = i\dot{M}a\sin\theta(2r\partial_r + 1)\chi_0 \tag{7.4.7}$$

和

$$(\partial_r \Delta \mathcal{D}_1 + \mathcal{L}_0^{\dagger}\mathcal{L}_1 + 2\rho\partial_v)\Phi_0 = 0\,,$$
$$(\partial_r \Delta \mathcal{D}_0 + \mathcal{L}_1^{\dagger}\mathcal{L}_0 - 2\rho\partial_v + 2\dot{M}\rho/\rho^{*2})\Phi_1$$
$$\equiv (\Delta \mathcal{D}_1 + \mathcal{L}_1\mathcal{L}_0^{\dagger} + 2\rho\partial_v + 2\dot{M}\rho/\rho^{*2})\Phi_1$$
$$= 2i\dot{M}a\sin\theta\big[r(\partial_r - 1/\rho^*) + 1\big]\Phi_0\,,$$
$$(\Delta \mathcal{D}_0\partial_r + \mathcal{L}_0\mathcal{L}_1^{\dagger} - 2\rho\partial_v)\Phi_2$$
$$= -2\ddot{M}ra^2\sin^2\theta\Phi_0 - 4i\dot{M}ra\sin\theta\mathcal{L}_1\Phi_0\,. \tag{7.4.8}$$

需指出的是方程(7.4.7)和(7.4.8)也可以通过仿照Teukolsky微扰论经退耦处理得到, 而这里的处理是直接从一阶方程作具体计算而导出这些方程的. 方程(7.4.7)和(7.4.8)的左边对应于稳态Kerr时空情形, 而右边的与质量M的时间导数有关的项则是动态Kerr黑洞情形所特有的, 可以证明它们与旋系数ν有关.

对于无质量的标量场, 无源的的标量波方程: $\Box\Phi = 0$在动态Kerr时空中可写为

$$(\Delta \mathcal{D}_1\partial_r + \mathcal{L}_1\mathcal{L}_0^{\dagger} + 2\rho\partial_v)\Phi \equiv (\partial_r\Delta\mathcal{D}_0 + \mathcal{L}_1^{\dagger}\mathcal{L}_0 - 2\rho\partial_v)\Phi = 0\,. \tag{7.4.9}$$

方程(7.4.7-7.4.9)可视为推广的Teukolsky主方程. 当黑洞质量M为一个常数或者黑洞不转动时, 这些方程可回到已有的结果. 由于动态Kerr黑洞属于Petrov II-型, 研究这个时空的引力微扰非常复杂. 对于Weyl张量旋量的分量ψ_0和ψ_1, 不难完成微扰分析, 但对于其它Weyl张量旋量的分量, 微扰处理则不是一件轻松的工作.

上面已导出了动态Kerr度规中控制标量场、中微子场和电磁场微扰的主方程. 现在通过考察自旋为0, 1/2和1的无质量粒子的Hawking辐射来研究该时空的量子热性质. 对二阶方程(7.4.7-7.4.9)实施广义乌龟坐标变换处理并取趋于事件视界的极限后, 可以把它们纳入一个统一形式的在视界附近的标准波方程

$$\frac{\partial^2\Psi_p}{\partial r_*^2} + 2\frac{\partial^2\Psi_p}{\partial r_*\partial v_*} + 2\Omega_H\frac{\partial^2\Psi_p}{\partial r_*\partial\varphi} + 2C_3\frac{\partial^2\Psi_p}{\partial r_*\partial\theta_*} + 2\big(C_2 + iC_1\big)\frac{\partial\Psi_p}{\partial r_*} = 0\,, \tag{7.4.10}$$

式中Ω_H和C_1, C_2, C_3均为实常数,

$$\Omega_H = \frac{a(1 - r_{H,v})}{r_H^2 + a^2 - r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0}, \quad C_3 = \frac{-r_{H,\theta}}{r_H^2 + a^2 - r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0},$$
$$C_2 + iC_1 = \frac{-1}{2(r_H^2 + a^2 - r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0)}\Big[2p(r_H - M + ia\cos\theta_0 r_{H,v}) -2(2p+1)r_H r_{H,v} + \cot\theta_0 r_{H,\theta} + r_{H,\theta\theta} + r_{H,vv}a^2\sin^2\theta_0 +2(s+p)\dot{M}r_H\frac{a^2\sin^2\theta_0 r_{H,v} - ia\sin\theta_0 r_{H,\theta}}{\Delta_H - 2r_{H,v}(r_H^2 + a^2)}\Big].$$

当$p = s = 0$时, 标量场Φ作为特殊情形包含在波方程(7.4.10)中. 对所有的场分量作适当变换后, 方程(7.4.10)对于一个传播的外引力场也成立. 在导出方程(7.4.10)的过程中, 已用L' Hôspital法则处理了一个0/0-型不定式而得到了一个有限值$2(r_H - M) - 4r_H r_{H,v}$, 而且已调节参数$\kappa$使之满足

$$\frac{r_H(1 - 2r_{H,v}) - M}{\kappa} + 2\Delta_H - 2r_{H,v}(r_H^2 + a^2) = r_H^2 + a^2 - r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0. \quad (7.4.11)$$

由此式我们可得到表面引力

$$\kappa = \frac{r_H(1 - 2r_{H,v}) - M}{(r_H^2 + a^2 - r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0)(1 - 2r_{H,v}) + 2r_{H,\theta}^2}. \quad (7.4.12)$$

动态Kerr黑洞的事件视界的位置r_H及其温度$\kappa/(2\pi)$不仅依赖于超前时间v, 而且也依赖于角度θ. 对于慢蒸发黑洞($\dot{M} \approx 0$)情形, 可以用叠代法求出它们的近似结果, 但在这里我们不作此分析.

在上面的处理中, 最关键的一步是要利用一阶导数之间的关系式(7.4.5)去换掉二阶方程中的一阶导数交叉项. 另外也很重要的是要调节参数κ使每个二阶方程在视界附近化成标准的波动方程, 同时也得到κ的表达式.

既然方程(7.4.10)中的各个实系数在视界附近可视为有限的常数, 方程(7.4.10)有分离变量形式$\Psi_p = R(r_*)\exp[\lambda\theta_* + i(m\varphi - \omega v_*)]$, 其径向部分的解为$R = R_1\exp[2i(\omega - m\Omega_H - C_1 + iC_0)r_*] + R_0$, 其中$R_1$ 和R_2为积分常数, λ为一个实的分离变量常数, $C_0 = \lambda C_3 + C_2$.

入射波$\Psi_p^{\text{in}} = \exp[\lambda\theta_* + i(m\varphi - \omega v_*)]$在视界$r = r_H$上是正则的, 而出射波

$$\Psi_p^{\text{out}}(r > r_H) = \Psi_p^{\text{in}}\exp[2i(\omega - m\Omega_H - C_1 + iC_0)r_*] \quad (7.4.13)$$

是不解析的, 但可沿下半复r-平面将其从视界外解析延拓到视界内为

$$\widetilde{\Psi_p^{\rm out}}(r<r_H)=\Psi_p^{\rm out}(r>r_H)\exp[\pi(\omega-m\Omega_H-C_1+iC_0)/\kappa]\,. \tag{7.4.14}$$

根据Damour-Ruffini-Sannan建议的方法，粒子在事件视界上的相对散射几率和从黑洞辐射出来的热谱分别为：

$$\left|\frac{\Psi_p^{\rm out}}{\widetilde{\Psi_p^{\rm out}}}\right|^2=\exp[-2\pi(\omega-m\Omega_H-C_1)/\kappa]\,,$$

$$\langle\mathcal{N}(\omega)\rangle=\frac{\Gamma(\omega)}{\exp[2\pi(\omega-m\Omega_H-C_1)/\kappa]-(-1)^{4s^2}}\,, \tag{7.4.15}$$

式中$\Gamma(\omega)$为粒子以一定模式从视界逃到无穷远处的透射系数，m为角动量磁量子数，Ω_H可以阐释为蒸发的Kerr黑洞事件视界上的角速度，而与"自旋相关"的项C_1的明显表达式为

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{1}{r_H^2+a^2-r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0}\Big[-pa\cos\theta_0 r_{H,v}\\ &\quad+(s+p)\frac{\dot{M}r_Ha\sin\theta_0 r_{H,\theta}}{\Delta_H-2r_{H,v}(r_H^2+a^2)}\Big]\,.\end{aligned} \tag{7.4.16}$$

自旋为s的粒子的热辐射谱(7.4.15)由两个部分组成: $\omega_p=m\Omega_H+C_1$，其一为转动能$m\Omega_H$，它来源于黑洞的转动与粒子的轨道角动量之间的耦合；其二为C_1，该项来自黑洞的角动量与粒子的内禀自旋之间的耦合. 在稳态Kerr黑洞(M为常数，$r_{H,v}=r_{H,\theta}=0$)或者Vaidya-型黑洞($a=r_{H,\theta}=0$, $r_{H,v}\neq 0$) 情形，C_1均为零. 当黑洞不转动时，热谱(7.4.15)回到已知结果，而且当$r_{H,v}\simeq 0$(即流明$L=-dM/dv=-\dot{M}\simeq 0$)时，它趋于公式(7.4.1).

为了更明显地看出C_1项的意义，如果在天体物理学意义上可忽略黑洞的角向形变$r_{H,\theta}$，那么在微蒸发和慢转动情形下，ω_p可近似为

$$\omega_p\simeq\left(m-p\frac{r_{H,v}}{1-r_{H,v}}\cos\theta_0\right)\Omega_H=m\Omega_H+C_1\,,\quad (p=0,1,\cdots,2s) \tag{7.4.17}$$

因子$r_{H,v}/(1-r_{H,v})$描述黑洞随时间的演化，而因子$\cos\theta_0$来自自旋-转动耦合的标量积. 在忽略角向形变(取$r_{H,\theta}=0$)的情况下，图4a, 4b自旋$s=1/2,1$情形下，比较了自旋-转动耦合项C_1与"通常"的转动能$m\Omega_H$(在图中$\dot{r}_H=r_{H,v}$).

C_1项明显与粒子处于不同自旋态的手征有关，它标识了一项起源于粒子的自旋与蒸发黑洞的转动之间的相互作用的新效应. 这个新的自旋-转动耦合效应的特征是它依赖于旋转粒子的不同手征态.

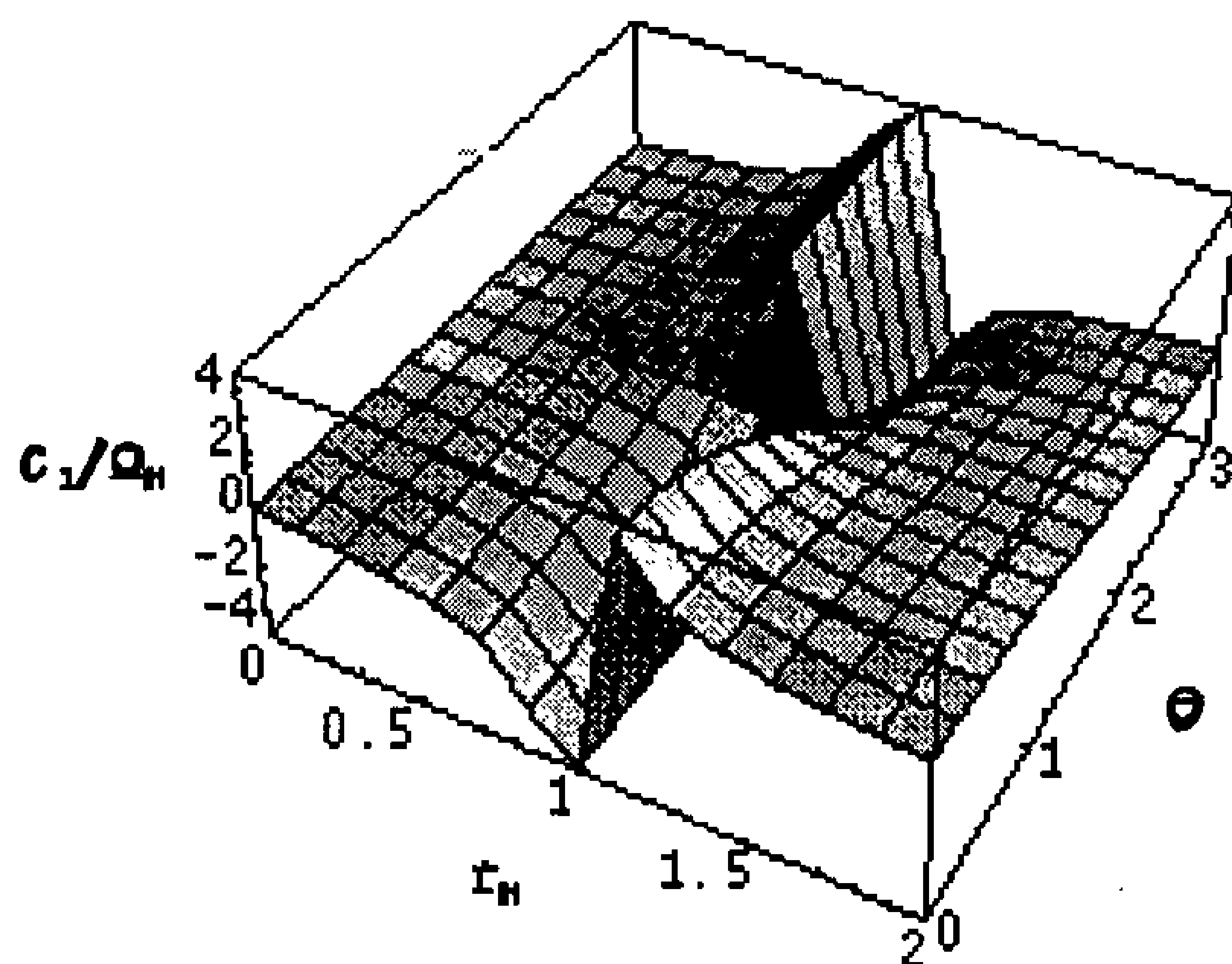


图4a 在慢蒸发和忽略角向形变的情形下，自旋-转动耦合项C_1与转动能$m\Omega_H$的比较：电子情形($s=1/2$)

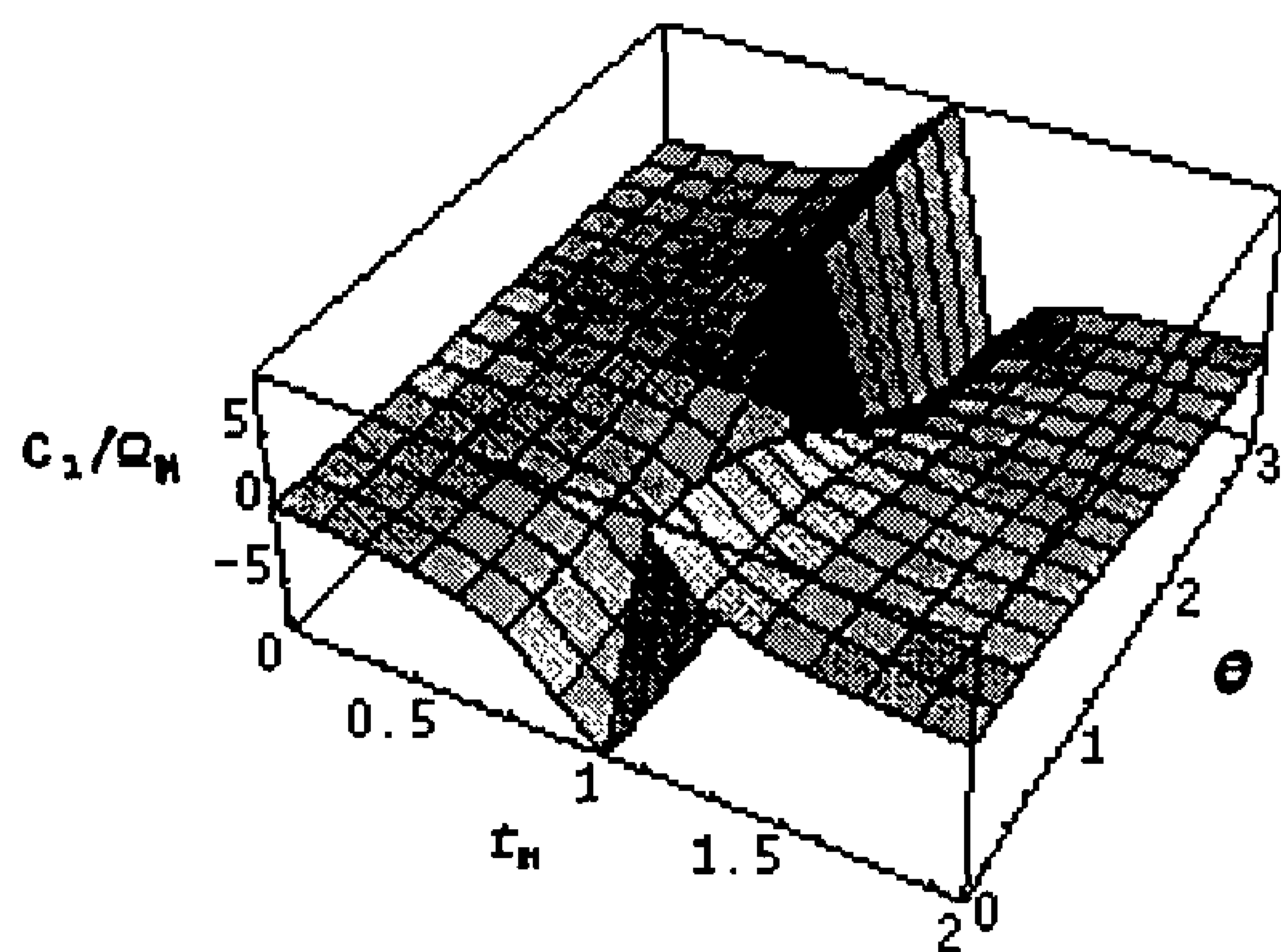


图4b 在慢蒸发和忽略角向形变的情形下，自旋-转动耦合项C_1与转动能$m\Omega_H$的比较：光子情形($s=1$)

这一节的研究不仅包含了Vaidya时空中自旋粒子的热辐射谱, 而且也为York的猜测[287] 提供了部分证据, 即带电的转动黑洞的量子辐射可能起源于量子能层效应. 在这里我们建议动态Kerr黑洞的辐射机制可以被量子转动能层所改变, 而这个能层可看成是经典转动能层与York的量子能层的一个混合物. 因此, 我们认为动态黑洞一定具有某些与稳态黑洞完全不同的新的特性, 而本节所研究的自旋-转动耦合效应可能就是一个较好的例子.

§7.5 动态Kerr-Newman黑洞的Hawking辐射

这一节利用前面发展了的广义乌龟坐标变换法去研究动态Kerr-Newman黑洞中Klein-Gordon 粒子和Dirac粒子的Hawking蒸发, 表明Dirac粒子的热辐射Fermi谱中有一项新的自旋-转动耦合效应, 而在标量粒子的Bose谱中没有这项效应. 这个效应的特征是它明显依赖于自旋-1/2 粒子的不同手征态.

在超前的Eddington-Finkelstein(EF)坐标系中, 动态Kerr-Newman黑洞的度规表为

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\Sigma}(dv - a\sin^2\theta d\varphi)^2 - \Sigma(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \\ &\quad -2(dv - a\sin^2\theta d\varphi)(dr - a^2\sin^2\theta d\varphi)\,, \end{aligned} \tag{7.5.1}$$

式中$\Delta = r^2 - 2M(v)r + Q^2(v) + a^2$, $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta = \rho^*\rho$, $\rho^* = r + ia\cos\theta$, $\rho = r - ia\cos\theta$. 黑洞的质量M和电荷Q均是超前时间v的函数, 但比角动量a为一个常数.

许殷彦[324]已经证明度规(7.5.1)连同电磁势1-形式

$$\mathbf{A} = \frac{Q(v)r}{\Sigma}(dv - a\sin^2\theta d\varphi) \tag{7.5.2}$$

是Einstein-Maxwell方程的一个精确的"辐射"解. 正如不带电的情形一样, 蒸发的Kerr-Newman黑洞的线元是稳态Kerr-Newman黑洞解在动态情形下的一个自然推广, 但它属于Petrov II-型, 而后者属于Petrov D-型. 时空(7.5.1) 的几何特征由三类曲面所刻划: 表面视界$r_{\rm AH}^{\pm} = M \pm (M^2 - Q^2 - a^2)^{1/2}$, 类时极限面$r_{\rm TLS}^{\pm} = M \pm (M^2 - Q^2 - a^2\cos^2\theta)^{1/2}$和事件视界$r_{\rm EH}^{\pm} = r_H$. 事件视界必须是一个零曲面, 满足零曲面条件$g^{\mu\nu}\partial_\mu F\partial_\nu F = 0$和$F(v, r, \theta) = 0$. 广义乌龟坐标变换法(GTCT)可以非常有效地确定动力学黑洞的事件视界和温度.

下面用广义乌龟坐标变换法从零曲面方程导出视界面方程. 基于动态Kerr-Newman黑洞是关于φ-轴对称的, 可以引入与第一节完全相同的广义乌龟坐标变换(GTCT)

$$r_* = r + \frac{1}{2\kappa(v_0,\theta_0)}\ln[r - r_H(v,\theta)]\,, \qquad v_* = v - v_0\,, \quad \theta_* = \theta - \theta_0\,,$$

其中$r_H = r_H(v,\theta)$为事件视界的位置, $\kappa = \kappa(v_0,\theta_0)$ 为一个可调节参数. 所有参数κ, v_0和θ_0在乌龟坐标变换下均不变, v_0和θ_0标识黑洞的初始状态.

对零曲面方程$g^{\mu\nu}\partial_\mu F\partial_\nu F = 0$应用GTCT并取$r \to r_H(v_0,\theta_0)$, $v \to v_0$和$\theta \to \theta_0$极限后得到

$$\left[\Delta_H - 2(r_H^2 + a^2)r_{H,v} + a^2\sin^2\theta_0 r_{H,v}^2 + r_{H,\theta}^2\right]\left(\frac{\partial}{\partial r_*}F\right)^2 = 0\,. \tag{7.5.3}$$

显然方程(7.5.3)有解的条件是要求方括号里的系数项为零, 即

$$\Delta_H - 2(r_H^2 + a^2)r_{H,v} + a^2\sin^2\theta_0 r_{H,v}^2 + r_{H,\theta}^2 = 0\,, \tag{7.5.4}$$

式中已记$\Delta_H = r_H^2 - 2Mr_H - Q^2 + a^2$. 物理量$r_{H,v} = \partial r_H/\partial v$和$r_{H,\theta} = \partial r_H/\partial\theta$刻划事件随时间和角度的变化, 反映了在视界附近存在有量子能层. 由视界面方程(7.5.4)可以确定动态Kerr-Newman黑洞事件视界的位置, 不难得到

$$r_H = \frac{M}{1 - 2r_{H,v}} \pm \left[\frac{M^2}{(1 - 2r_{H,v})^2} - \frac{Q^2 + a^2\sin^2\theta_0 r_{H,v}^2 + r_{H,\theta}^2}{1 - 2r_{H,v}} - a^2\right]^{1/2}. \tag{7.5.5}$$

当$Q = 0$时, (7.5.5)式回到动态Kerr黑洞情形下的已知结果.

现在我们首先研究具有最小电磁耦合的Klein-Gordon方程在视界附近的渐近行为. 描述质量为μ_0、电荷为e的标量粒子动力学的波方程

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(\partial_\mu + ieA_\mu)\left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\partial_\nu + ieA_\nu)\Phi\right] + \mu_0^2\Phi = 0\,, \tag{7.5.6}$$

在时空(7.5.1)中的明显表达式为

$$\begin{aligned}&\left[\Delta\partial_r^2 + 2(r^2 + a^2)\partial_{vr}^2 + 2a\partial_{r\varphi}^2 + 2a\partial_{v\varphi}^2 + a^2\sin^2\theta\partial_v^2 + \partial_\theta^2 + \cot\theta\partial_\theta\right.\\ &\left.+\frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 + 2r\partial_v + 2(r - M + ieQr)\partial_r + ieQ - \mu_0^2\Sigma\right]\Phi = 0\,. \end{aligned} \tag{7.5.7}$$

在视界$r = r_H$附近, 方程(7.5.7)的渐近形式为

$$\begin{aligned}
&\Big\{\big[\frac{r_H(1-2r_{H,v})-M}{\kappa}+2\Delta_H-2r_{H,v}(r_H^2+a^2)\big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}\\
&+2(r_H^2+a^2-r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0)\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}-2r_{H,\theta}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}\\
&+2a(1-r_{H,v})\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi}-(-2r_Hr_{H,v}-2ieQr_H\\
&\quad+r_{H,\theta}\cot\theta_0+r_{H,\theta\theta}+r_{H,vv}a^2\sin^2\theta_0)\frac{\partial}{\partial r_*}\Big\}\Phi=0\,. \qquad (7.5.8)
\end{aligned}$$

在导出方程(7.5.8)的过程中, 已利用了事件视界面方程(7.5.4)去处理一个0/0-型不定式而得到它的有限值为

$$\lim_{\substack{r\to r_H\\ v\to v_0\\ \theta\to\theta_0}}\frac{\Delta-2(r^2+a^2)r_{H,v}+a^2\sin^2\theta r_{H,v}{}^2+r_{H,\theta}^2}{r-r_H}=2(r_H-M)-4r_Hr_{H,v}\,. \quad (7.5.9)$$

通过调节参数κ, 可以把方程(7.5.8)化成视界附近的标准波动方程, 但我们把这件工作留待稍后去做.

其次, 我们再来研究旋量粒子的Dirac方程在视界附近的渐近行为. 为了在Newman-Penrose 表述中写出Dirac方程的明显形式, 我们建立下述复的零标架系使之满足正交条件: $\mathbf{l}\cdot\mathbf{n}=-\mathbf{m}\cdot\overline{\mathbf{m}}=1$,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{l}=dv-a\sin^2\theta d\varphi\,,\quad \mathbf{n}=\frac{\Delta}{2\Sigma}\big(dv-a\sin^2\theta d\varphi\big)-dr\,,\\
&\mathbf{m}=\frac{1}{\sqrt{2}\rho^*}\big\{i\sin\theta[adv-(r^2+a^2)d\varphi]-\Sigma d\theta\big\}\,,\\
&\overline{\mathbf{m}}=\frac{1}{\sqrt{2}\rho}\big\{-i\sin\theta[adv-(r^2+a^2)d\varphi]-\Sigma d\theta\big\}\,, \qquad (7.5.10)
\end{aligned}$$

并且得到相应的方向导数为

$$\begin{aligned}
&D=-\partial_r\,,\quad \underline{\Delta}=\frac{r^2+a^2}{\Sigma}\partial_v+\frac{\Delta}{2\Sigma}\partial_r+\frac{a}{\Sigma}\partial_\varphi\,,\\
&\delta=\frac{1}{\sqrt{2}\rho^*}\big(ia\sin\theta\partial_v+\partial_\theta+\frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi\big)\,,\\
&\overline{\delta}=\frac{1}{\sqrt{2}\rho}\big(-ia\sin\theta\partial_v+\partial_\theta-\frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi\big)\,. \qquad (7.5.11)
\end{aligned}$$

不难求出动态Kerr-Newman时空在上述零标架中非零的旋系数如下:

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{\rho^*}, \quad \epsilon = -\frac{ia\cos\theta}{\Sigma}, \quad \gamma = \frac{r\Delta}{2\Sigma^2} - \frac{r-M}{2\Sigma},$$
$$\mu = \frac{\Delta}{2\Sigma\rho^*}, \quad \tau = \frac{ia\sin\theta}{\sqrt{2}\rho^{*2}}, \quad \tilde{\nu} = \frac{(\dot{M}r - Q\dot{Q})ia\sin\theta}{\sqrt{2}\Sigma\rho},$$
$$\alpha = \tilde{\pi} - \beta^*, \quad \tilde{\pi} = -\frac{ia\sin\theta}{\sqrt{2}\Sigma}, \quad \beta = \frac{\cot\theta}{2\sqrt{2}\rho^*} + \frac{ira\sin\theta}{\sqrt{2}\Sigma\rho^*}. \qquad (7.5.12)$$

将电磁势在零标架上的投影

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = \frac{Qr}{\Sigma}, \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{l} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{m} = \mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{m}} = 0 \qquad (7.5.13)$$

和所需的旋系数代入四个耦合的Chandrasekhar-Dirac方程在Newman-Penrose表述中的表达式[243]

$$(D + \epsilon - \tilde{\rho} + ie\mathbf{A}\cdot\mathbf{l})F_1 + (\overline{\delta} + \tilde{\pi} - \alpha + ie\mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{m}})F_2 = \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}G_1,$$
$$(\underline{\Delta} + \mu - \gamma + ie\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})F_2 + (\delta + \beta - \tau + ie\mathbf{A}\cdot\mathbf{m})F_1 = \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}G_2,$$
$$(D + \epsilon^* - \tilde{\rho}^* + ie\mathbf{A}\cdot\mathbf{l})G_2 - (\delta + \tilde{\pi}^* - \alpha^* + ie\mathbf{A}\cdot\mathbf{m})G_1 = \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}F_2,$$
$$(\underline{\Delta} + \mu^* - \gamma^* + ie\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})G_1 - (\overline{\delta} + \beta^* - \tau^* + ie\mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{m}})G_2 = \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}F_1, \qquad (7.5.14)$$

可以得到

$$-(\partial_r + \frac{r}{\Sigma})F_1 + \frac{1}{\sqrt{2}\rho}(\mathcal{L}_{1/2} - \frac{ira\sin\theta}{\Sigma})F_2 = \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}G_1,$$
$$\frac{\Delta}{2\Sigma}(\mathcal{D}_{1/2} - \frac{ia\cos\theta}{\Sigma})F_2 + \frac{1}{\sqrt{2}\rho^*}(\mathcal{L}^\dagger_{1/2} - \frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{\Sigma})F_1 = \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}G_2,$$
$$-(\partial_r + \frac{r}{\Sigma})G_2 - \frac{1}{\sqrt{2}\rho^*}(\mathcal{L}^\dagger_{1/2} + \frac{ira\sin\theta}{\Sigma})G_1 = \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}F_2,$$
$$\frac{\Delta}{2\Sigma}(\mathcal{D}_{1/2} + \frac{ia\cos\theta}{\Sigma})G_1 - \frac{1}{\sqrt{2}\rho}(\mathcal{L}_{1/2} - \frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{\Sigma})G_2 = \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}F_1, \qquad (7.5.15)$$

其中μ_0, e分别为Dirac粒子的质量和电荷, 方程(7.5.15)中算符$\mathcal{L}_n$和$\mathcal{L}^\dagger_n$的定义与前面几节一致, 另外还定义了如下的算符:

$$\mathcal{D}_{1/2} = \partial_r + \Delta^{-1}\big[r - M + 2ieQr + 2a\partial_\varphi + 2(r^2+a^2)\partial_v\big].$$

在方程(7.5.15)中进一步作代换$F_1 = \frac{1}{\sqrt{2\Sigma}}P_1$, $F_2 = \frac{\rho}{\sqrt{\Sigma}}P_2$, $G_1 = \frac{\rho^*}{\sqrt{\Sigma}}Q_1$ 和$G_2 = \frac{1}{\sqrt{2\Sigma}}Q_2$, 可以将其简化为

$$
\begin{aligned}
&-\partial_r P_1 + \mathcal{L}_{1/2} P_2 = i\mu_0 \rho^* Q_1\,, \qquad \Delta \mathcal{D}_{1/2} P_2 + \mathcal{L}_{1/2}^\dagger P_1 = i\mu_0 \rho^* Q_2\,,\\
&-\partial_r Q_2 - \mathcal{L}_{1/2}^\dagger Q_1 = i\mu_0 \rho P_2\,, \qquad \Delta \mathcal{D}_{1/2} Q_1 - \mathcal{L}_{1/2} Q_2 = i\mu_0 \rho P_1\,.
\end{aligned} \tag{7.5.16}
$$

由于Dirac方程(7.5.16)在下列替换下仍可被满足

$$
Q_1 \to P_2^*\,, \quad Q_2 \to -P_1^*\,, \qquad eQ \to -eQ\,,
$$

所以只需处理一对分量(P_1, P_2)即可. 除在稳态Kerr-Newman黑洞(M为常数) 和球对称Vaidya-Bonner黑洞($a=0$)情形外, 方程(7.5.16)不能事先分离变量. 先前已多次强调, 对于讨论Hawking辐射问题, 人们只需要关心场方程在视界附近的渐近行为.

在广义乌龟坐标变换下, 方程(7.5.16)在视界附近的渐近形式为

$$
\begin{aligned}
&\big(r_{H,\theta} + ia\sin\theta_0 r_{H,v}\big)\frac{\partial}{\partial r_*}P_1 - \big[\Delta_H - 2(r_H^2 + a^2) r_{H,v}\big]\frac{\partial}{\partial r_*}P_2 = 0\,,\\
&\frac{\partial}{\partial r_*}P_1 + \big(r_{H,\theta} - ia\sin\theta_0 r_{H,v}\big)\frac{\partial}{\partial r_*}P_2 = 0\,.
\end{aligned} \tag{7.5.17}
$$

对于Q_1分量和Q_2分量存在类似的关系式.

P_1和P_2有非平凡解— 即方程(7.5.17)中的导数$\frac{\partial}{\partial r_*}P_1$和$\frac{\partial}{\partial r_*}P_2$ 不为零— 的存在条件是方程(7.5.17)的行列式为零, 这正好给出事件视界面方程(7.5.4). 关系式(7.5.17)的重要性还在于要利用它去消除二阶方程中的一阶导数交叉项. 另外, 只有同时考察一阶Dirac方程及其二阶方程的渐近行为才是完全自洽的, 因为四分量Dirac旋量应该同时满足它们.

现在来考虑Dirac方程的二阶形式. 经直接计算得到

$$
\begin{aligned}
&\big(\Delta \mathcal{D}_{1/2}\partial_r + \mathcal{L}_{1/2}\mathcal{L}_{1/2}^\dagger - \mu_0^2\Sigma\big)P_1 = \mu_0(a\sin\theta Q_2 - i\Delta Q_1)\\
&\qquad -ia\sin\theta\big[(2\dot{M}r - Q\dot{Q})\partial_r + \dot{M} - 2ie\dot{Q}r\big]P_2\,,\\
&\big(\partial_r \Delta \mathcal{D}_{1/2} + \mathcal{L}_{1/2}^\dagger \mathcal{L}_{1/2} - \mu_0^2\Sigma\big)P_2 = \mu_0(a\sin\theta Q_1 + iQ_2)\,.
\end{aligned} \tag{7.5.18}
$$

它们在视界附近有如下渐近形式

$$\begin{aligned}
&\Big\{\Big[\frac{r_H(1-2r_{H,v})-M}{\kappa}+2\Delta_H-2r_{H,v}(r_H^2+a^2)\Big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}\\
&+2(r_H^2+a^2-r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0)\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}-2r_{H,\theta}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}\\
&+2a(1-r_{H,v})\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi}-(r_H-M-2ieQr_H+r_{H,\theta}\cot\theta_0\\
&+(ia\cos\theta_0-4r_H)r_{H,v}+r_{H,\theta\theta}+r_{H,vv}a^2\sin^2\theta_0)\frac{\partial}{\partial r_*}\Big\}P_1\\
&=-2i(\dot{M}r_H-Q\dot{Q})a\sin\theta_0\frac{\partial}{\partial r_*}P_2\\
&=-2i(\dot{M}r_H-Q\dot{Q})a\sin\theta_0\frac{r_{H,\theta}+ia\sin\theta_0 r_{H,v}}{\Delta_H-2(r_H^2+a^2)r_{H,v}}\frac{\partial}{\partial r_*}P_1 \qquad (7.5.19)
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
&\Big\{\Big[\frac{r_H(1-2r_{H,v})-M}{\kappa}+2\Delta_H-2r_{H,v}(r_H^2+a^2)\Big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}\\
&+2(r_H^2+a^2-r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0)\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}-2r_{H,\theta}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}\\
&+2a(1-r_{H,v})\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi}-(M-r_H-2ieQr_H-ia\cos\theta_0 r_{H,v}\\
&+r_{H,\theta}\cot\theta_0+r_{H,\theta\theta}+r_{H,vv}a^2\sin^2\theta_0)\frac{\partial}{\partial r_*}\Big\}P_2=0\,, \qquad (7.5.20)
\end{aligned}$$

其中已利用关系式(7.5.17)中的第一个式子去换掉方程(7.5.19)中的一阶导数项$\frac{\partial}{\partial r_*}P_2$.

为了将方程(7.5.8)、(7.5.19)和(7.5.20)在视界附近化成波动方程的标准形式,需调节参数κ使之满足

$$\frac{r_H(1-2r_{H,v})-M}{\kappa}+2\Delta_H-2r_{H,v}(r_H^2+a^2)=r_H^2+a^2-r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0\,, \qquad (7.5.21)$$

由此并利用方程(7.5.4)后可得到事件视界的“表面引力”

$$\kappa=\frac{r_H(1-2r_{H,v})-M}{(r_H^2+a^2-r_{H,v}a^2\sin^2\theta_0)(1-2r_{H,v})+2r_{H,\theta}^2}\,. \qquad (7.5.22)$$

在进行这样的系数调节后,这些波方程可纳入一个统一的形式

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}+2\Omega_H\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi}+2C_3\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}+2(C_2+iC_1+ie\Phi_H)\frac{\partial}{\partial r_*}\Big]\Psi=0\,, \qquad (7.5.23)$$

式中

$$\Omega_H = \frac{a(1 - r_{H,v})}{r_H^2 + a^2 - r_{H,v} a^2 \sin^2\theta_0}, \qquad \Phi_H = \frac{Q r_H}{r_H^2 + a^2 - r_{H,v} a^2 \sin^2\theta_0},$$

$$C_3 = \frac{-r_{H,\theta}}{r_H^2 + a^2 - r_{H,v} a^2 \sin^2\theta_0},$$

而C_1和C_2均为实的常数, 对于$\Psi = P_1$,

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{-1}{2(r_H^2 + a^2 - r_{H,v} a^2 \sin^2\theta_0)} \Big[r_H(1 - 4r_{H,v}) - M + r_{H,\theta\theta} \\ &\quad + r_{H,vv} a^2 \sin^2\theta_0 + r_{H,\theta} \cot\theta_0 + \frac{2(\dot{M} r_H - Q\dot{Q}) r_{H,v} a^2 \sin^2\theta_0}{\Delta_H - 2r_{H,v}(r_H^2 + a^2)} \Big], \\ C_1 &= \frac{-1}{2(r_H^2 + a^2 - r_{H,v} a^2 \sin^2\theta_0)} \Big[r_{H,v} a \cos\theta_0 \\ &\quad - \frac{2(\dot{M} r_H - Q\dot{Q}) r_{H,\theta} a \sin\theta_0}{\Delta_H - 2r_{H,v}(r_H^2 + a^2)} \Big]; \end{aligned} \tag{7.5.24}$$

对于$\Psi = P_2$,

$$\begin{aligned} C_2 &= -\frac{M - r_H + r_{H,\theta\theta} + r_{H,vv} a^2 \sin^2\theta_0 + r_{H,\theta} \cot\theta_0}{2(r_H^2 + a^2 - r_{H,v} a^2 \sin^2\theta_0)}, \\ C_1 &= \frac{r_{H,v} a \cos\theta_0}{2(r_H^2 + a^2 - r_{H,v} a^2 \sin^2\theta_0)}; \end{aligned} \tag{7.5.25}$$

以及对于$\Psi = \Phi$,

$$\begin{aligned} C_2 &= -\frac{-2r_H r_{H,v} + r_{H,\theta} \cot\theta_0 + r_{H,\theta\theta} + r_{H,vv} a^2 \sin^2\theta_0}{2(r_H^2 + a^2 - r_{H,v} a^2 \sin^2\theta_0)}, \\ C_1 &= 0. \end{aligned} \tag{7.5.26}$$

在视界附近, 上述各系数可近似地视为有限的实常数, 因而方程(7.5.23) 可看作为一个常微分方程, 其解可以有分离变量形式

$$\Psi = R(r_*)\Theta(\theta_*) e^{i(m\varphi - \omega v_*)},$$

其径向部分和角向部分分别满足

$$R'' + 2i(-iC_0 + C_1 + m\Omega_H + e\Phi_H - \omega) R' = 0, \qquad \Theta' = \lambda\Theta, \tag{7.5.27}$$

式中λ为分离变量过程中引入的一个常数. 考虑到当过渡到球对称情形或稳态Kerr黑洞时角向部分应回到自旋权重的旋量球谐函数或广义椭球波函数, λ为应取为实数, $C_0 = \lambda C_3 + C_2$. 方程(7.5.27)的通解为

$$R = R_1 e^{2[i(\omega - m\Omega_H - e\Phi_H - C_1) - C_0]r_*} + R_0, \qquad \Theta = e^{\lambda\theta_*}. \tag{7.5.28}$$

式中R_1和R_0为积分常数.

方程(7.5.23)的入射波解和出射波解分别是

$$\begin{aligned}&\Psi_{\rm in} = e^{-i\omega v_* + im\varphi + \lambda\theta_*},\\&\Psi_{\rm out}(r > r_H) = e^{-i\omega v_* + im\varphi + \lambda\theta_*} e^{2[i(\omega - m\Omega_H - e\Phi_H - C_1) - C_0]r_*}.\end{aligned} \tag{7.5.29}$$

入射波$\Psi_{\rm in}$在视界上是正则的, 而出射波$\Psi_{\rm out}$ 则是非解析的, 但可以沿下半复r-平面将其从视界外解析延拓到视界内

$$(r - r_H) \longrightarrow (r_H - r)e^{-i\pi}$$

为

$$\widetilde{\Psi_{\rm out}}(r < r_H) = \Psi_{\rm out}(r > r_H) e^{i\pi C_0/\kappa} e^{\pi(\omega - m\Omega_H - e\Phi_H - C_1)/\kappa}. \tag{7.5.30}$$

在事件视界上, 粒子的相对散射几率为

$$\left|\frac{\Psi_{\rm out}}{\widetilde{\Psi_{\rm out}}}\right|^2 = e^{-2\pi(\omega - m\Omega_H - e\Phi_H - C_1)/\kappa}. \tag{7.5.31}$$

遵从Damour-Ruffini-Sannan建议的方法, 不难求出Klein-Gordon粒子和Dirac粒子从黑洞辐射出来的Hawking辐射谱

$$\langle \mathcal{N}_\omega \rangle \simeq \frac{1}{e^{(\omega - m\Omega_H - e\Phi_H - C_1)/T_H} \pm 1}, \qquad T_H = \frac{\kappa}{2\pi}, \tag{7.5.32}$$

式中m为角动量磁量子数, Ω_H和Φ_H可分别阐释为动态Kerr-Newman黑洞事件视界上的角速度和电势. 在方程(7.5.32)中, 上面的正号对应于Fermi-Dirac分布, 而下面的负号代表Bose-Einstein 统计.

热辐射谱(7.5.32)表明自旋为s的粒子在蒸发的Kerr-Newman时空中总的相互作用能为

$$\begin{aligned}\omega_p \;=\; & \frac{1}{r_H^2 + a^2 - r_{H,v} a^2 \sin^2\theta_0}\Big[ma(1 - r_{H,v}) - pa\cos\theta_0 r_{H,v}\\&+ eQr_H + (s+p)\dot{M} r_H \frac{a\sin\theta_0 r_{H,\theta}}{\Delta_H - 2r_{H,v}(r_H^2 + a^2)}\Big].\end{aligned} \tag{7.5.33}$$

当$p = s = 0$时, 此式对应于标量场$\Psi = \Phi$情形; 在旋量$(s = 1/2)$ 情形下, 当$p = 1/2, -1/2$时, Ψ分别代表P_1, P_2.

粒子的能谱由三个部分: $\omega_p = m\Omega_H + e\Phi_H + C_1$组成, 第一项为转动能$m\Omega_H$, 它来自黑洞的转动与粒子的轨道角动量之间的耦合; 第二项为电磁相互作用能$e\Phi_H$; 另一项C_1起源于黑洞角动量与粒子的内禀自旋之间的耦合, 它没有经典的对应物, 而前二项均有经典对应. 从"自旋相关"项C_1的明显表达式

$$C_1 = \frac{\Omega_H}{1 - r_{H,v}}\Big[- p\cos\theta_0 r_{H,v} + (s+p)\dot{M} r_H \frac{\sin\theta_0 r_{H,\theta}}{\Delta_H - 2r_{H,v}(r_H^2 + a^2)}\Big] \tag{7.5.34}$$

易看出, 当回到稳态Kerr-Newman黑洞(M为常数, $r_{H,v} = r_{H,\theta} = 0$)或者Vaidya-型黑洞($a = r_{H,\theta} = 0$, $r_{H,v} \neq 0$)情形时, C_1均为零.

C_1项明显与Dirac粒子在不同自旋态中的手征有关, 它标志了一项新的源自蒸发黑洞的转动与粒子的自旋之间的相互作用效应. 由于$r_{H,v}$和$r_{H,\theta}$描述黑洞随时间的演化和在角度方向的变化, 因此我们认为动态Kerr-Newman黑洞的辐射机制可以被量子转动能层所改变, 而这一能层可以视为经典的转动能层和量子能层的混合物.

方程(7.5.5)和(7.5.22)给出了蒸发的Kerr-Newman黑洞事件视界的位置和表面温度, 它们不仅依赖于超前时间v, 而且也随角度θ而变化, 这表明动态Kerr-Newman黑洞视界上各点温度并不相同. 方程(7.5.32)给出了该时空中Klein-Gordon粒子与Dirac粒子的热辐射谱. Bose谱与Fermi谱的差别在于后者有一个新的C_1项而前者则没有此项. 这项新的效应可能起源于Dirac粒子的内禀自旋与蒸发黑洞的转动之间的相互作用. 这种自旋-转动耦合效应的特征是它对自旋为1/2粒子的不同手征态的依赖性, 而且该项效应与粒子的质量无关. 当黑洞不转动时或为稳态Kerr-Newman黑洞, 该效应就不存在了.

这一节的研究包括前几节(当$Q = 0$时)和第六章(当$a = 0$时)的工作作为特例.

§7.6 动态Kerr-Newman黑洞中Dirac粒子的热辐射— 再讨论

这一节将采用另一个不同的零标架系重新研究上节的内容, 目的是想看看不同零标架的具体选取对物理结果有什么影响.

上一节已给出了动态Kerr-Newman黑洞的线元和电磁势在超前EF坐标系的表达式. 与上节不同的是, 我们选取下列伪正交的零标架系使其1-形式基为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{l} &= -(dv - a\sin^2\theta d\varphi)\,, \quad \mathbf{n} = -\frac{\Delta}{2\Sigma}(dv - a\sin^2\theta d\varphi) + dr\,,\\
\mathbf{m} &= \frac{1}{\sqrt{2}\rho}\big\{i\sin\theta[adv - (r^2+a^2)d\varphi] - \Sigma d\theta\big\}\,,\\
\overline{\mathbf{m}} &= \frac{1}{\sqrt{2}\rho^*}\big\{-i\sin\theta[adv - (r^2+a^2)d\varphi] - \Sigma d\theta\big\}\,,
\end{aligned} \tag{7.6.1}
$$

相应的方向导数为

$$
\begin{aligned}
D &= \partial_r\,, \quad \underline{\Delta} = -\Big[\frac{r^2+a^2}{\Sigma}\partial_v + \frac{\Delta}{2\Sigma}\partial_r + \frac{a}{\Sigma}\partial_\varphi\Big]\,,\\
\delta &= \frac{1}{\sqrt{2}\rho}\Big(ia\sin\theta\partial_v + \partial_\theta + \frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi\Big)\,,\\
\overline{\delta} &= \frac{1}{\sqrt{2}\rho^*}\Big(-ia\sin\theta\partial_v + \partial_\theta - \frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi\Big)\,,
\end{aligned} \tag{7.6.2}
$$

式中$\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2 + a^2$, $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta = \rho^*\rho$, $\rho^* = r + ia\cos\theta$, $\rho = r - ia\cos\theta$. 不难验证, 此零标架系与上节所选的零标架系相差一个III-类Lorentz转动(见附录C). 在此零标架系中不为零的NP旋系数为

$$
\begin{aligned}
\tilde{\rho} &= \frac{-1}{\rho^*}\,, \quad \gamma = \frac{r-M}{2\Sigma} - \frac{\Delta}{2\Sigma\rho^*}\,, \quad \mu = \frac{-\Delta}{2\Sigma\rho^*}\,,\\
\tau &= \frac{ia\sin\theta}{\sqrt{2}\Sigma}\,, \quad \tilde{\nu} = \frac{(\dot{M}r - Q\dot{Q})ia\sin\theta}{\sqrt{2}\Sigma\rho^*}\,,\\
\alpha &= \tilde{\pi} - \beta^*\,, \quad \tilde{\pi} = \frac{-ia\sin\theta}{\sqrt{2}\rho^{*2}}\,, \quad \beta = \frac{\cot\theta}{2\sqrt{2}\rho}\,.
\end{aligned} \tag{7.6.3}
$$

电磁势在上述零标架上的投影为

$$
\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = \frac{-Qr}{\Sigma}\,, \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{l} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{m} = \mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{m}} = 0\,. \tag{7.6.4}
$$

将所需的NP旋系数和$\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = -Qr/\Sigma$代入质量为$\mu_0$、电荷为$e$的Dirac粒子满足的在Newman-Penrose表述中表为旋量形式的Chandrasekhar-Dirac-Page 方程[243]后, 我们可以得到

$$
\begin{aligned}
(\partial_r + \frac{1}{\rho^*})F_1 + \frac{1}{\sqrt{2}\rho^*}\mathcal{L}_{1/2}F_2 &= \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}G_1\,,\\
-\frac{\Delta}{2\Sigma}\mathcal{D}_{1/2}F_2 + \frac{1}{\sqrt{2}\rho}(\mathcal{L}_{1/2}^\dagger - \frac{ia\sin\theta}{\rho^*})F_1 &= \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}G_2\,,\\
(\partial_r + \frac{1}{\rho})G_2 - \frac{1}{\sqrt{2}\rho}\mathcal{L}_{1/2}^\dagger G_1 &= \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}F_2\,,\\
-\frac{\Delta}{2\Sigma}\mathcal{D}_{1/2}G_1 - \frac{1}{\sqrt{2}\rho^*}(\mathcal{L}_{1/2} + \frac{ia\sin\theta}{\rho})G_2 &= \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}F_1\,,
\end{aligned} \tag{7.6.5}
$$

上式中的算符$\mathcal{D}_{1/2}$, $\mathcal{L}_n$和$\mathcal{L}_n^\dagger$的定义与前面几节一致.

进一步作代换

$$P_1 = \sqrt{2}\rho^* F_1\,, \quad P_2 = -F_2\,, \quad Q_1 = -G_1\,, \quad Q_2 = \sqrt{2}\rho G_2$$

可将它们变为

$$\begin{aligned} &-\partial_r P_1 + \mathcal{L}_{1/2} P_2 = i\mu_0 \rho^* Q_1\,, \qquad \Delta\mathcal{D}_{1/2} P_2 + \mathcal{L}_{1/2}^\dagger P_1 = i\mu_0 \rho^* Q_2\,, \\ &-\partial_r Q_2 - \mathcal{L}_{1/2}^\dagger Q_1 = i\mu_0 \rho P_2\,, \qquad \Delta\mathcal{D}_{1/2} Q_1 - \mathcal{L}_{1/2} Q_2 = i\mu_0 \rho P_1\,. \end{aligned} \tag{7.6.6}$$

方程(7.6.6)与上节的方程(7.5.16)完全相同, 而且在置换$Q_1 \to P_2^*$, $Q_2 \to -P_1^*$, $eQ \to -eQ$下仍能满足. 从一阶Dirac方程(7.6.6)可导出二阶Dirac方程

$$\begin{aligned} &\big(\Delta\mathcal{D}_{1/2}\partial_r + \mathcal{L}_{1/2}\mathcal{L}_{1/2}^\dagger - \mu_0^2\Sigma\big) P_1 = \mu_0 (a\sin\theta Q_2 - i\Delta Q_1) \\ &\qquad -ia\sin\theta\big[(2\dot{M}r - Q\dot{Q})\partial_r + \dot{M} - 2ie\dot{Q}r\big] P_2\,, \\ &\big(\partial_r \Delta\mathcal{D}_{1/2} + \mathcal{L}_{1/2}^\dagger\mathcal{L}_{1/2} - \mu_0^2\Sigma\big) P_2 = \mu_0 (a\sin\theta Q_1 + iQ_2)\,, \\ &\big(\partial_r \Delta\mathcal{D}_{1/2} + \mathcal{L}_{1/2}\mathcal{L}_{1/2}^\dagger - \mu_0^2\Sigma\big) Q_1 = \mu_0 (a\sin\theta P_2 + iP_1)\,, \\ &\big(\Delta\mathcal{D}_{1/2}\partial_r + \mathcal{L}_{1/2}^\dagger\mathcal{L}_{1/2} - \mu_0^2\Sigma\big) Q_2 = \mu_0 (a\sin\theta P_1 - i\Delta P_2) \\ &\qquad -ia\sin\theta\big[(2\dot{M}r - Q\dot{Q})\partial_r + \dot{M} - 2ie\dot{Q}r\big] Q_1\,. \end{aligned} \tag{7.6.7}$$

方程(7.6.7)也可仿照Teukolsky的微扰论推导并在零标架系(7.6.2) 中写出, 它与前节中的二阶Dirac方程完全相同.

如果采用与上节相同的广义乌龟坐标变换, 则可得到相同的视界面方程、Hawking温度以及热辐射谱. 这说明, 在零标架的III-类Lorentz转动下, 所得到的物理结果完全相同. 因此不同零标架的具体选取不影响最后的物理结论, 我们认为这是广义协变原理— 物理规律独立于坐标系的选取— 在这一问题中的具体体现.

§7.7 小结

在本章中, 我们研究了动态Kerr(-Newman)黑洞的量子热效应, 表明这一类Petrov II-型时空有新的量子效应— 自旋-转动耦合效应. 这个效应与粒子的质量没有关系. 对动态转动黑洞量子热效应的研究还表明:

1. 这类时空的视界位置和表面温度是v和θ的函数;

2. 由于Hawking辐射与粒子有无质量没有关系，以及Dirac方程存在复共轭对称性$G_1 = -F_2^*$, $G_2 = F_1^*$, 因此只需处理一对旋量分量即可，这使计算工作大为减轻;

3. 不必对一阶Dirac方程事先进行分离变量处理，但自洽性要求同时考虑对一阶方程和二阶方程施行GTCT处理，这是成功处理任意动态黑洞中的高自旋粒子的Hawking辐射的关键.

4. 研究黑洞热效应的三个要素是：给出事件视界面方程和Hawking温度以及导出热辐射谱. 选取具体不同的零标架对这三个要素应没有影响. 对于两个不同的零标架的具体选取，它们之间只是相差一个(复合的)Lorentz转动变换，但所得的结果显然应该是相同的，这是一个普遍原理— 物理结果不依赖于坐标系的选择— 在Hawking辐射问题中的表现.

动态Kerr(-Newman)黑洞属于Petrov II-型，在类Kinnersley零标架中其旋系数$\kappa = \lambda = \sigma = 0$, 但$\nu \neq 0$. 经过适当的Lorentz转动变换还可使$\epsilon = 0$. 在这样的零标架中Weyl张量旋量$\psi_0 = \psi_1 = 0$, 而$\psi_2$、$\psi_3$和$\psi_4$均不为零，非零的Ricci张量为$\Phi_{12}$ 和Φ_{22}(对于动态Kerr-Newman黑洞, Maxwell复标量$\phi_0 = \phi_2 = 0$, ϕ_1不为零，此外还有$\Phi_{11} \neq 0$). 因此不能直接应用Teukolsky微扰论处理稳态情形的结果，但可以仿照其处理方法. 对于质量为μ_0的Dirac场[3]

$$(D + \epsilon - \rho)F_1 - (\bar{\delta} + \pi - \alpha)F_0 = \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}G_1\,, \tag{7.7.1}$$

$$(\delta + \beta - \tau)F_1 - (\Delta + \mu - \gamma)F_0 = \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}G_0\,, \tag{7.7.2}$$

可在动态Kerr-Newman时空中，导出二阶微扰方程

$$\begin{aligned}&\big[(D + \epsilon^* - \rho - \rho^*)(\Delta + \mu - \gamma) - (\delta - \alpha^* - \tau + \pi^*)(\bar{\delta} + \pi - \alpha) + \frac{\mu_0^2}{2}\big]F_0 \\ &\quad = \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}\big(\rho G_0 - \tau G_1\big)\,,\end{aligned} \tag{7.7.3}$$

$$\begin{aligned}&\big[(\Delta - \gamma^* + \mu + \mu^*)(D + \epsilon - \rho) - (\bar{\delta} + \beta^* + \pi - \tau^*)(\delta + \beta - \tau) + \frac{\mu_0^2}{2}\big]F_1 \\ &\quad = \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}\big(\mu G_1 - \pi G_0\big) + \big[\nu D + (D + 2\epsilon + \epsilon^* - \rho^*)\nu - \psi_3\big]F_0\,.\end{aligned} \tag{7.7.4}$$

虽然一阶方程(7.7.1)和(7.7.2)没有与旋系数ν有关的项，但导出的二阶方程中有一项与ν成正比的项$\nu D F_0$. 这一点是与稳态Kerr-Newman黑洞情形不同之处.

[3]另一对场方程为复共轭关系: $F_1^* = G_0 = -G_2$, $F_0^* = -F_2^* = G_1$, 这里为简化讨论而省略没有写出来.

由于Hawking效应与粒子的质量无关, 当质量μ_0为零时, 上述方程化为Weyl中微子方程. 因此为简化讨论旋量粒子的Hawking辐射问题起见, 人们只需要考虑零质量情形(Weyl中微子)即可. 在前几节的讨论中, 我们实际上是直接从一阶方程出发通过作具体计算而导出二阶方程的具体表达式的, 并且已经看到在F_1满足的二阶方程中有一项与旋系数ν成正比例的一阶导数交叉项. 用直接计算法和用上述微扰论法导出的二阶方程是完全相同的.

当人们对二阶方程实施广义乌龟坐标变换处理(引入正确的坐标变换并取趋于视界的极限)后, 就会发现F_1满足的方程中与ν成正比的项就无法消除了, 这需要而且只能求助于一阶方程. 当人们考虑对一阶方程作类似处理后, 就正好提供了一阶导数之间的关系式, 利用它可换掉二阶方程中一阶导数的交叉项. 因此, 就能够将每个分量满足的(变换后的)方程化为单一分量的波动方程. 另外, 同时考虑对一阶方程和二阶方程这两者作处理, 也是物理上要求完全自洽的结果, 因为旋量波函数必须同时满足一阶的和二阶的场方程. 对高自旋粒子的Hawking辐射的处理完全则与此类似. 认识到这一点, 是解决这类问题的关键.

下一个重要步骤是要将视界附近的二阶方程化成为标准形式, 为此须选取可调节的待定参数κ使$\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}$和$\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}$的系数比为$1:2$, 通过令这一关系式成立, 一方面可使波方程化成标准形式, 另一方面也是为了得到κ的具体表达式. 以后的处理则完全仿照Damour-Ruffini-Sannan方法.

上面的讨论也暗示了不需要事先对一阶方程进行分离变量, 尔后再作广义乌龟坐标变换(GTCT)处理. 可以在先作GTCT处理后, 再考虑到时空的对称性, 最终只需作一次合理的分离变量处理即可. 这预示了广义乌龟坐标变换法原则上可以应用于对任意黑洞中任意种类(高自旋)粒子的Hawking辐射的讨论.

第八章 Kinnersley黑洞的量子热效应

"The character of such spin-rotation or spin-acceleration coupling effect is its obvious dependence upon different helicity states of particles with higher-spins."

在稳态情况下, 视界表面引力表征温度. 黑洞热力学第零定律表述为稳态黑洞时空的视界表面引力是常数, 这个说法意味着稳态黑洞的Hawking温度在视界上处处相同, 不随时间或位置而变化. 但是原则上允许存在Hawking温度处处不相同的事件视界, 不过这样的视界肯定不会是稳态孤立黑洞的视界. 大量的研究表明, Vaidya-型球对称非静态黑洞视界上的Hawking温度确实是随时间变化的, 但在视界的同时面上它仍然是一个常数. 对于动态转动黑洞, 其视界面上的Hawking温度不仅随时间变化, 而且随空间点变化. 对于作任意加速运动的非球对称非稳态(辐射的)Kinnersley 黑洞, 其视界温度不仅随时间变化, 而且在视界的同时面上, 此温度也不是常数.

这一章主要应用经过进一步发展了的广义乌龟坐标变换法(DRS-ZWC方法)研究Kinnersley 黑洞中旋量粒子的Hawking蒸发[279–283], 表明作任意加速运动的Kinnersley黑洞具有自旋-加速耦合效应, 而作直线加速运动的Kinnerlsey 黑洞则没有此类效应. 这一效应也不存在于标量粒子的的热辐射谱中[325–332].

§8.1 Kinnersley黑洞与C-度规

Kinnersley"光子火箭"度规描述作任意加速运动的点质量的时空, 在推迟的Eddington-Finkelstein(EF)坐标系中, 其线元为[24–26]

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[2F - r^2(f^2 + g^2\sin^2\theta)\right]du^2 + 2dudr + 2fr^2dud\theta \\ &\quad +2gr^2\sin^2\theta dud\varphi - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\,, \end{aligned} \tag{8.1.1}$$

式中$2F = 1 - 2M(v)/r - 2ar\cos\theta$, $f = b\sin\varphi + c\cos\varphi - a\sin\theta$, $g = (b\cos\varphi - c\sin\varphi)\cot\theta$. a、b和c都是推迟坐标u的函数. 北极点$\theta = 0$总是指向加速度的方向, a为质点加速度的大小, b和c描述加速度方向变化率.

"光子火箭"度规的带电版本[25, 26, 234]与上式相同, 只是其中的函数F现在改为

$$2F = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2 + P^2}{r^2}\big(1 - 4ar\cos\theta\big) - 2ar\cos\theta - \frac{\Lambda}{3}r^2,$$

其中质量M, 电荷Q和磁荷P均为推迟坐标u的函数, Λ为宇宙学常数.

为了方便于讨论Hawking辐射, 通常用超前的EF坐标v取代推迟的EF坐标u, 用v-坐标描述的作任意加速运动质点的时空度规为

$$\begin{aligned} ds^2 &= \big[2F - r^2(f^2 + g^2\sin^2\theta)\big]dv^2 - 2dvdr - 2fr^2dvd\theta \\ &\quad -2gr^2\sin^2\theta dvd\varphi - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\,, \end{aligned} \tag{8.1.2}$$

式中F, f, g的表达式不变, 只是其中的质量M, 电荷Q和磁荷P以及加速参数a、b和c现在均为超前时间v的函数. 不难验证, 度规(8.1.1) 或(8.1.2)是Einstein-Maxwell方程的一个属于Petrov D-型的"辐射"解

"光子火箭"这种质点的运动十分复杂. 对于直线加速情况, 有$b = c = 0$, 这时$f = -a\sin\theta$, $g = 0$. 对于直线匀加速情况, a等于常数.

另一种描述匀加速带电的点质量的静态度规[24]称为带电的静态C-度规, 其线元为

$$\begin{aligned} ds^2 &= 2Hdu^2 + 2dudr + 2Ar^2dudx - r^2(\frac{dx^2}{G} + Gdz^2) \\ &= 2Hdv^2 - 2dvdr - 2Ar^2dvdx - r^2(\frac{dx^2}{G} + Gdz^2)\,, \end{aligned} \tag{8.1.3}$$

式中$2H = -A^2r^2G(x) + ArG'(x) + (1 + 6mAx + 6e^2A^2x^2) - 2(m + 2e^2Ax)/r + e^2/r^2$, $G(x) = 1 - x^2 - 2mAx - e^2A^2x^4$. 常数$m$, e为质点的质量和电荷, A为加速度. 在$m = e = 0$, $A \neq 0$时, G化为$G = 1 - x^2$, 引入变换$x = \cos\theta$, $z = \varphi$后, C-度规成为

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 - Ar\cos\theta - A^2r^2\sin^2\theta)du^2 + 2dudr \\ &\quad -2Ar^2\sin\theta dud\theta - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \\ &= (1 - Ar\cos\theta - A^2r^2\sin^2\theta)dv^2 - 2dvdr \\ &\quad +2Ar^2\sin\theta dvd\theta - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\,. \end{aligned} \tag{8.1.4}$$

经过适当的坐标变换, 线元(8.1.4)可化为Minkowski度规的形式.

带电的静态C-度规也属于Petrov D-型. 人们已对这个度规进行了大量的研究[28–30]. 不难发现, 作匀加速直线运动的Kinnersley度规在$M = Q = P = 0$时与在$m = e = 0$情形的静态C-度规有相同的几何结构— Rindler时空. 因此, 我们可以猜测在M、Q和P为常数时作匀加速直线运动的Kinnersley度规与带电的静态C-度规之间可能存在某种联系. 进一步推广这种猜想, 需要研究作匀加速直线运动并有转动的Kinnersley-Kerr度规[31] 在M、Q和P为常数时与稳态C-度规[27]之间的关系. 这个问题显然应归为Einstein-Maxwell方程的求解, 而这个工作已超出了本论文的研究范围, 因此不予考虑.

在下一节中, 我们首先讨论作加速直线运动的Kinnersley黑洞时空中无质量的旋量粒子— Weyl中微子的Hawking辐射.

§8.2 变加速直线运动黑洞的量子热效应 — Wey1中微子

广义乌龟坐标变换法(GTCT)已成功地用来研究作变加速运动的Kinnersley时空中标量粒子的量子热效应[325–332], 但是这个方法在没有经过进一步发展之前尚不能处理旋量粒子的Hawking蒸发.

在这一节中我们应用在前一章中推广了的乌龟坐标变换法(DRS-ZWC法)考察作变加速直线运动Kinnersley黑洞中无质量Fermi子, 即Weyl中微子的Hawking辐射, 导出了局部的事件视界面方程和Hawking温度以及中微子的热辐射谱. 结果表明视界的位置和温度不仅随时间变化, 而且明显依赖于方位角.

下面要研究的作变加速直线运动的Kinnersley黑洞[24]的线元在超前的EF坐标系中可写为

$$ds^2 = 2dv(Gdv - dr - r^2 f d\theta) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\,, \tag{8.2.1}$$

其中$2G = 1 - 2M/r - 2ar\cos\theta - r^2 f^2$, $f = -a\sin\theta$, 参数$a = a(v)$ 为加速度大小, 黑洞质量$M(v)$是超前时间v的函数.

现在我们导出背景时空(8.2.1)的局部事件视界面方程, 这里用两种方法来确定Kinnersley黑洞的事件视界位置. 在动态黑洞中, 事件视界仍应是类光曲面, 满

足零曲面条件: $g^{\mu\nu}\partial_\mu F\partial_\nu F=0$. 由于时空(8.2.1) 显然是关于$\varphi$-轴对称的, 即$F$不是$\varphi$的函数, 因而零曲面方程$F=F(v,r,\theta)=0$可写成$r=r(v,\theta)$, 由此不难得出

$$\partial_v F+\partial_r F\partial_v r=0\,,\quad \partial_\theta F+\partial_r F\partial_\theta r=0\,,\quad \partial_\varphi F=0\,. \tag{8.2.2}$$

首先利用零曲面条件来寻找时空(8.2.1)中的局部事件视界. 将(8.2.2)式代入零曲面条件

$$\begin{aligned}(2G+r^2f^2)(\partial_r F)^2+2\partial_v F\partial_r F-2f\partial_\theta F\partial_r F\\ +\frac{1}{r^2}(\partial_\theta F)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}(\partial_\varphi F)^2=0\,,\end{aligned} \tag{8.2.3}$$

可得到

$$2G-2\partial_v r+\big(rf+\frac{\partial_\theta r}{r}\big)^2=0\,.$$

满足此式的曲面$r=r_H(v,\theta)$就是局部事件视界, 即它满足

$$1-\frac{2M(v)}{r_H}-2a(v)r_H\cos\theta-2r_{H,v}-2a(v)r_{H,\theta}\sin\theta+\big(\frac{r_{H,\theta}}{r_H}\big)^2=0\,. \tag{8.2.4}$$

显然r_H不仅依赖于时间v, 而且也依赖于角度θ, 这意味着视界的位置和黑洞的形状随时间而变化.

其次采用乌龟坐标变换法来导出局部事件视界方程. 基于时空的φ-轴对称性, 可以引入如下的广义乌龟坐标变换:

$$r_*=r+\frac{1}{2\kappa}\ln[r-r_H(v,\theta)]\,,\quad v_*=v-v_0\,,\quad \theta_*=\theta-\theta_0\,, \tag{8.2.5}$$

即

$$dr_*=dr+\frac{1}{2\kappa(r-r_H)}\big(dr-r_{H,v}dv-r_{H,\theta}d\theta\big)\,,\quad dv_*=dv\,,\quad d\theta_*=d\theta\,,$$

其中$r_H=r_H(v,\theta)$是事件视界的位置, $\kappa=\kappa(v_0,\theta_0)$ 为可调节的一个待定参数, 在乌龟坐标变换下为一个常数. 参数v_0和θ_0为任意固定的常数, 刻划黑洞的初始状态, 它们在乌龟坐标变换下保持不变. $r_{H,v}=\partial_v r_H$和$r_{H,\theta}=\partial_\theta r_H$可视为描述视界面演化的参数. 由式(8.2.5) 导出的一阶导数和二阶导数之间的变换关系式可参见附录B. 我们约定, 一旦作了乌龟坐标变换并取趋于视界的极限后, 函数G和f均在视界$r_H(v_0,\theta_0)$处(在$v=v_0$时刻, 极角$\theta=\theta_0$方向上)取值, 即$G=G(r_H(v_0,\theta_0),v_0,\theta_0)$, $f=-a(v_0)\sin\theta_0$.

对方程(8.2.3)作乌龟坐标变换(8.2.5)，并取$r \to r_H(v_0,\theta_0)$，$v \to v_0$和$\theta \to \theta_0$的极限后可得

$$\Big(2G + r_H^2 f^2 - 2r_{H,v} + 2f r_{H,\theta} + \frac{r_{H,\theta}^2}{r_H^2}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial r_*}F\Big)^2 = 0\,,$$

然后令$\big(\frac{\partial}{\partial r_*}F\big)^2$前面的系数为零，同样可以得到决定局部事件视界$r_H(v_0,\theta_0)$的方程

$$1 - \frac{2M(v_0)}{r_H} - 2a(v_0)r_H\cos\theta_0 - 2r_{H,v} - 2a(v_0)r_{H,\theta}\sin\theta_0 + \Big(\frac{r_{H,\theta}}{r_H}\Big)^2 = 0\,. \quad (8.2.6)$$

方程(8.2.4)对任意时刻v，任意极角θ成立；而方程(8.2.6) 只对固定时刻v_0，固定极角θ_0成立，是方程(8.2.4)在$v = v_0$，$\theta = \theta_0$时的特殊情形. 对于一个缓慢的黑洞蒸发过程，可以把它视为一系列不连续的准静态过程. 在慢蒸发情形下，黑洞视界面变化较为缓慢，考虑两个相邻的时刻$v \approx v_0$和角度$\theta \approx \theta_0$，我们有$r_H(v,\theta) \approx r_H(v_0,\theta_0)$. 因此只要计算视界面$r_H$在某一具体时刻$v_0$和极角$\theta_0$方向上的值$r_H = r_H(v_0,\theta_0)$即可，这相当于对视界面逐点进行局部分析. 由准静态近似合理性的保证，在计算完后再作代换$v_0 \to v$和$\theta_0 \to \theta$就可以推知任意时刻的一般概况. 对表面引力κ，也可以作完全类似的处理.

由上面的讨论可以看出，广义乌龟坐标变换法能给出一致的结果. 而这一方法是一种局部的分析法,其合理性在于，(物理上)黑洞蒸发来源于视界面附近的真空涨落，能具体体现物理意义的仅是量子场在视界附近的渐近行为. 因此，为了考察黑洞的量子热效应，以后只需在视界面附近对量子场作局部近似分析，就可以获得足够的相关物理信息.

现在我们来研究Kinnersley黑洞中Weyl中微子的Hawking辐射. 当忽略量子场对背景时空的反作用时，中微子在弯曲时空中的动力学行为可由在Newman-Penrose(N-P)表述中表为旋量形式的Weyl中微子方程描述[5]

$$\begin{aligned}
&(D + \epsilon - \rho)\eta_1 - (\bar{\delta} + \tilde{\pi} - \alpha)\eta_0 = 0\,,\\
&(\Delta + \mu - \gamma)\eta_0 - (\delta + \beta - \tau)\eta_1 = 0\,.
\end{aligned} \quad (8.2.7)$$

为了给出它在时空(8.2.1)中的明显形式，我们选取零标架$\{\mathbf{l},\mathbf{n},\mathbf{m},\overline{\mathbf{m}}\}$使之满足正交关系$\mathbf{l}\cdot\mathbf{n} = -\mathbf{m}\cdot\overline{\mathbf{m}} = 1$，这样协变的1-形式基可取为

$$\begin{aligned}
&\mathbf{l} = dv\,, \quad \mathbf{n} = Gdv - dr - r^2 f d\theta\,,\\
&\mathbf{m} = \frac{-r}{\sqrt{2}}\big(d\theta + i\sin\theta d\varphi\big)\,,\\
&\overline{\mathbf{m}} = \frac{-r}{\sqrt{2}}\big(d\theta - i\sin\theta d\varphi\big)\,,
\end{aligned} \quad (8.2.8)$$

相应的方向导数则为

$$\begin{aligned} &D=-\partial_r\,, \qquad \Delta=\partial_v+G\partial_r\,,\\ &\delta=\frac{1}{\sqrt{2}r}\big(-r^2f\partial_r+\partial_\theta+\frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi\big)\,,\\ &\bar{\delta}=\frac{1}{\sqrt{2}r}\big(-r^2f\partial_r+\partial_\theta-\frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi\big)\,. \end{aligned} \tag{8.2.9}$$

不难得到Kinnersley时空在上述零标架中不为零的N-P自旋系数如下: ($G_{,r}=dG/dr$)

$$\begin{aligned} &\rho=1/r\,,\quad \mu=G/r\,,\quad \gamma=-G_{,r}/2\,,\quad \beta=\cot\theta/(2\sqrt{2}r)\,,\\ &\tau=-\bar{\pi}=f/\sqrt{2}\,,\quad \alpha=-\cot\theta/(2\sqrt{2}r)+f/\sqrt{2}\,,\\ &\nu=\big[(2rG-r^2G_{,r})f+r^2f_{,v}+G_{,\theta}\big]/(\sqrt{2}r)\,. \end{aligned}$$

将有关的旋系数和方向导数代入方程(8.2.7)中, 并作代换$\chi_1=\sqrt{2}r\eta_1$, $\chi_0=\eta_0$, 则可得到

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}_0\chi_1+\big(\mathcal{L}_{1/2}-r^2f\mathcal{D}_2\big)\chi_0=0\,,\\ &r^2\big(2\partial_v+2G\mathcal{D}_1+G_{,r}\big)\chi_0-\big(\mathcal{L}^{\dagger}_{1/2}-r^2f\mathcal{D}_0\big)\chi_1=0\,, \end{aligned} \tag{8.2.10}$$

式中定义了如下算符

$$\mathcal{D}_n=\partial_r+n/r\,,\ \mathcal{L}_n=\partial_\theta+n\cot\theta-\frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi\,,\ \mathcal{L}^{\dagger}_n=\partial_\theta+n\cot\theta+\frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi\,.$$

虽然方程(8.2.10)不能对θ进行分离变量, 但是为了考察在v_0 时刻、极角θ_0处视界r_H的Hawking效应, 我们可以只对它们在视界$r_H(v_0,\theta_0)$处附近的渐近行为感兴趣. 为此, 对方程(8.2.10) 作乌龟坐标变换(8.2.5), 并取$r\to r_H(v_0,\theta_0)$, $v\to v_0$和$\theta\to\theta_0$极限, 可得到其渐近形式为:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r_*}\chi_1-\big(r_{H,\theta}+r_H^2f\big)\frac{\partial}{\partial r_*}\chi_0=0\,,\\ &\big(r_{H,\theta}+r_H^2f\big)\frac{\partial}{\partial r_*}\chi_1+2r_H^2\big(G-r_{H,v}\big)\frac{\partial}{\partial r_*}\chi_0=0\,. \end{aligned} \tag{8.2.11}$$

显然, 方程(8.2.11)有非平凡解的条件是其行列式为零, 这给出如下的事件视界面方程

$$2G-2r_{H,v}+\big(r_Hf+\frac{r_{H,\theta}}{r_H}\big)^2=0\,.$$

可见这与从零曲面方程导出的结果(8.2.6)是一致的.

为了考察中微子的Hawking辐射, 我们现在考虑Weyl方程的二阶形式, 直接计算不难得到其二阶方程

$$\left[r^2\mathcal{D}_2(2\partial_v+2G\mathcal{D}_1+G_{,r})+(\mathcal{L}_{1/2}^{\dagger}-r^2f\mathcal{D}_2)(\mathcal{L}_{1/2}-r^2f\mathcal{D}_2)\right]\chi_0=0 \tag{8.2.12}$$

和

$$\begin{aligned}&\left[r^2(2\partial_v+2G\mathcal{D}_1+G_{,r})\mathcal{D}_0+(\mathcal{L}_{1/2}-r^2f\mathcal{D}_0)(\mathcal{L}_{1/2}^{\dagger}-r^2f\mathcal{D}_0)\right]\chi_1\\&=2r^2\Big\{[(2rG-r^2G_{,r})f+r^2f_{,v}+G_{,\theta}]\partial_r+2rf_{,v}\\&\quad-(rG_{,r}-3G+r^2G_{,rr}/2)f+G_{,\theta}/r+G_{,r\theta}/2\Big\}\chi_0\end{aligned} \tag{8.2.13}$$

的明显表达式为

$$\begin{aligned}&\Big[(2r^2G+r^4f^2)\partial_r^2+2r^2\partial_{vr}^2+\partial_\theta^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2-2r^2f\partial_{r\theta}^2+\frac{i\cos\theta}{\sin^2\theta}\partial_\varphi\\&+(\cot\theta-4rf)\partial_\theta+4r\partial_v+(3r^2G_{,r}+6rG+6r^3f^2-2r^2f\cot\theta)\partial_r\\&+r^2G_{,rr}+4rG_{,r}+2G+6r^2f^2-4rf\cot\theta-\frac{1}{4\sin^2\theta}-\frac{1}{4}\Big]\chi_0=0\end{aligned} \tag{8.2.14}$$

和

$$\begin{aligned}&\Big[(2r^2G+r^4f^2)\partial_r^2+2r^2\partial_{vr}^2+\partial_\theta^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2-2r^2f\partial_{r\theta}^2-\frac{i\cos\theta}{\sin^2\theta}\partial_\varphi\\&+\cot\theta\partial_\theta+(r^2G_{,r}+2rG+2r^3f^2-2r^2f\cot\theta)\partial_r-\frac{1}{4\sin^2\theta}-\frac{1}{4}\Big]\chi_1\\&=2r^2\Big\{[(2rG-r^2G_{,r})f+r^2f_{,v}+G_{,\theta}]\partial_r\\&\quad-\big(rG_{,r}-3G+r^2G_{,rr}/2\big)f+2rf_{,v}+G_{,\theta}/r+G_{,r\theta}/2\Big\}\chi_0\,.\end{aligned} \tag{8.2.15}$$

对二阶方程(8.2.14)和(8.2.15)作类似于前面对一阶方程所作的处理, 可以得到

$$\begin{aligned}&\Big\{\Big[\frac{A}{2\kappa}+2r_H^2(2G-r_{H,v})+2r_H^4f^2+2fr_H^2r_{H,\theta}\Big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+2r_H^2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}\\&-2\big(fr_H^2+r_{H,\theta}\big)\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}+\Big[-A+3r_H^2G_{,r}+r_H(6G-4r_{H,v})\\&+6r_H^3f^2-2r_H^2f\cot\theta_0+(4fr_H-\cot\theta_0)r_{H,\theta}-r_{H,\theta\theta}\Big]\frac{\partial}{\partial r_*}\Big\}\chi_0=0\end{aligned} \tag{8.2.16}$$

和



博士学位论文
DOCTORAL DISSERTATION

$$\Big\{\big[\frac{A}{2\kappa}+2r_H^2(2G-r_{H,v})+2r_H^4f^2+2fr_H^2r_{H,\theta}\big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+2r_H^2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}$$
$$-2\big(fr_H^2+r_{H,\theta}\big)\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}+\big[-A+r_H^2G_{,r}+2r_HG$$
$$+2r_H^3f^2-2r_H^2f\cot\theta_0-\cot\theta_0 r_{H,\theta}-r_{H,\theta\theta}\big]\frac{\partial}{\partial r_*}\Big\}\chi_1$$
$$=2r_H^2\big[(2r_HG-r_H^2G_{,r})f+r_H^2f_{,v}+G_{,\theta}\big]\frac{\partial}{\partial r_*}\chi_0$$
$$=-\frac{r_{H,\theta}+r_H^2f}{G-r_{H,v}}\big[(2r_HG-r_H^2G_{,r})f+r_H^2f_{,v}+G_{,\theta}\big]\frac{\partial}{\partial r_*}\chi_1\,, \qquad (8.2.17)$$

其中的系数A是一个0/0-型的不定式, 用L' Hôspital 法则处理后的结果为

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\substack{r\to r_H(v_0,\theta_0)\\ v\to v_0,\theta\to\theta_0}}\frac{2r^2(G-r_{H,v})+r^4f^2+2fr^2r_{H,\theta}+r_{H,\theta}^2}{r-r_H} \\ &= 2r_H^2G_{,r}+4r_H(G-r_{H,v})+4r_H^3f^2+4fr_Hr_{H,\theta} \\ &= 2r_H^2G_{,r}+2r_H^3f^2-2r_{H,\theta}^2/r_H\,. \end{aligned}$$

再调节参数κ使二阶导数$\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}$和$\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}$的系数比为$1:2$, 即

$$\frac{A}{2\kappa}+2r_H^2(2G-r_{H,v})+2r_H^4f^2+2fr_H^2r_{H,\theta}\equiv r_H^2\,,$$

可得到事件视界的表面引力为:

$$\kappa=\frac{r_H^2G_{,r}+r_H^3f^2-r_{H,\theta}^2/r_H}{r_H^2(1-2G)-r_H^4f^2+r_{H,\theta}^2}\,. \qquad (8.2.18)$$

将系数A代入方程(8.2.16)和(8.2.17)中并除以r_H^2后, 可以化这两个方程为在视界附近的标准波动方程

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}-2B\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}+2C\frac{\partial}{\partial r_*}\Big)\Psi=0\,, \qquad (8.2.19)$$

其中, 系数$B=f+r_{H,\theta}/r_H^2$, 而系数C 对于$\Psi=\chi_0$为

$$2C=\frac{2G}{r_H}+G_{,r}+2r_Hf^2-(2f+\frac{r_{H,\theta}}{r_H^2})\cot\theta_0-\frac{r_{H,\theta\theta}}{r_H^2}\,;$$

对于$\Psi=\chi_1$则为

$$\begin{aligned} 2C=&\frac{2G}{r_H}-G_{,r}-(2f+\frac{r_{H,\theta}}{r_H^2})\cot\theta_0+\frac{2r_{H,\theta}^2}{r_H^3}-\frac{r_{H,\theta\theta}}{r_H^2}\\ &+\frac{f+r_{H,\theta}/r_H^2}{G-r_{H,v}}\big[(2r_HG-r_H^2G_{,r})f+r_H^2f_{,v}+G_{,\theta}\big]\,. \end{aligned}$$


博士学位论文
DOCTORAL DISSERTATION

从上面的处理可以看出，正是利用了先前中导出的关系式(8.2.11)才能将耦合方程(8.2.17)化为单一分量的二阶波动方程. 这说明只有同时对一阶方程和二阶方程作处理才是自洽的，而且物理上也要求必须作这样的考虑. 对于一个缓慢的黑洞热辐射过程，因其视界面的变化是较为缓慢的，当人们作准静态近似时，二阶波动方程(8.2.19)中的各个系数在视界面附近取值，可以近似视为常数.

既然标准波方程(8.2.19)中的系数B和C在固定时刻$v = v_0$和固定极角$\theta = \theta_0$方向，视界位于$r_H = r_H(v_0, \theta_0)$处取值，可以对它进行分离变量如下

$$\Psi = R(r_*)\Theta(\theta_*)e^{i(m\varphi - \omega v_*)} . \tag{8.2.20}$$

将方案(8.2.20)代入方程(8.2.19)中可得到方程

$$\Theta' = \lambda\Theta , \qquad R'' = 2(i\omega - C_0)R'$$

的解为

$$\Theta = e^{\lambda\theta_*} , \qquad R = R_1 e^{2(i\omega - C_0)r_*} + R_0 , \tag{8.2.21}$$

其中λ为在分离变量过程中引入的一个实常数，$C_0 = C - \lambda B$.

入射波和出射波分别为

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{in}} &= e^{i(m\varphi - \omega v_*) + \lambda\theta_*} , \\ \Psi_{\text{out}}(r > r_H) &= e^{i(m\varphi - \omega v_*) + \lambda\theta_*} e^{2(i\omega - C_0)r_*} \\ &= \Psi_{\text{in}} e^{2(i\omega - C_0)r_*} . \end{aligned} \tag{8.2.22}$$

因为在视界附近有$r_* \sim (2\kappa)^{-1}\ln(r - r_H)$，所以入射波$\Psi_{\text{in}}$是解析的，而出射波$\Psi_{\text{out}}(r > r_H)$ 显然是非正则的，但可以沿下半复r-平面

$$(r - r_H) \longrightarrow (r_H - r)e^{-i\pi}$$

把它从视界外解析延拓到视界内为

$$\begin{aligned} \widetilde{\Psi_{\text{out}}}(r < r_H) &= e^{i(m\varphi - \omega v_*) + \lambda\theta_*} e^{2(i\omega - C_0)r_*} e^{\pi(\omega + iC_0)/\kappa} \\ &= \Psi_{\text{out}}(r > r_H) e^{\pi(\omega + iC_0)/\kappa} . \end{aligned} \tag{8.2.23}$$

按照Damour-Ruffini-Sannan建议的方法，容易得到出射波在视界上的相对散射几率为

$$\left|\frac{\Psi_{\rm out}}{\widetilde{\Psi_{\rm out}}}\right|^2 = e^{-2\pi\omega/\kappa} \tag{8.2.24}$$

和Weyl中微子的热辐射Fermi谱为

$$\langle \mathcal{N}_\omega \rangle \simeq \frac{1}{e^{\omega/T_H} + 1}, \tag{8.2.25}$$

其中Hawking温度的明显表达式为

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{4\pi r_H} \cdot \frac{M r_H - r_H^3 a \cos\theta_0 - r_{H,\theta}^2}{M r_H + r_H^3 a \cos\theta_0 + r_{H,\theta}^2/2}. \tag{8.2.26}$$

视界的温度不但依赖于时间, 而且也依赖于方位角, 这已有的结果是一致的.

方程(8.2.4)和(8.2.26)给出了局部事件视界的位置和温度, 它们随时间v和角度θ而变化, 与讨论标量场的热辐射时得到的结果一致. 方程(8.2.25)给出了作变加速直线运动的Kinnersley黑洞中Weyl中微子的Hawking辐射谱.

可以看到经过进一步发展了的GTCT(DRS-ZWC)方法的确能处理这类非球对称黑洞中旋量粒子的Hawking蒸发. 需要注意的是, 这个方法的特点是对视界面逐点进行局部分析, 其首要任务是导出在$v = v_0$时刻和$\theta = \theta_0$方向, 黑洞视界$r_H = r_H(v_0, \theta_0)$满足的局部事件视界面方程及其相应的表面引力(温度)和黑体辐射谱. 在黑洞慢蒸发情形下, 由准静态近似在作代换$v_0 \to v$和$\theta_0 \to \theta$后, 就可以获得任意时刻的一般结果.

§8.3 变加速直线运动黑洞的量子热效应 — Dirac粒子

本节应用广义乌龟坐标变换法(GTCT)研究带有电荷、磁荷和宇宙学常数并且作变加速直线运动的Kinnersley黑洞中Dirac粒子的Hawking辐射. GTCT法已成功用于讨论任意加速Kinnersley黑洞以及变加速Kinnersley-Kerr黑洞中标量粒子的Hawking效应[325–332]. 对于任意加速Kinnersley黑洞中旋量粒子的Hawking蒸发, 则首先由我们给出了满意的处理[279–281, 283, 282].

前面已经指出, 研究一般动态黑洞中Dirac粒子的量子热效应的主要困难在于, Dirac方程在最一般的时空中难以对所有的坐标分离变量. 不过, 研究经验表明广义乌龟坐标变换法并不要求对一阶Dirac场方程事先进行分量变量, 这就给人们

提供了一条处理该问题的可能性途径— 同时考虑对一阶的和二阶的场方程进行广义乌龟坐标变换处理. 对一阶方程处理的结果, 一方面可得到事件视界面方程, 另一方面提供一阶导数之间的关系式; 对二阶方程完成GTCT处理后, 通过调节参数κ可使二阶方程在事件视界附近化成标准形式的波方程, 同时得到κ的明显表达式. 以后的处理则完全采用Damour-Ruffini-Sannan建议的方案.

下面采用推广的GTCT(DRS-ZWC)方法研究带有电荷、磁荷和宇宙学常数的非球对称动态Kinnersley黑洞中Dirac粒子的Hawking蒸发, 导出作非匀加速直线运动的Kinnersley黑洞事件视界面方程及其Hawking温度, 表明它们不仅依赖于时间, 而且随方位角变化.

上一节已经给出变加速直线运动Kinnersley黑洞的线元在超前的EF坐标系中一般形式($b = c = 0$). 对于带电的版本, 只是其中$2G$改为$2G = 1 - 2M/r + (Q^2 + P^2)(1 - 4ra\cos\theta)/r^2 - 2ra\cos\theta - r^2 f^2 - \Lambda r^2/3$, $f = -a\sin\theta$. 参数$a = a(v)$为加速度大小, 质量M、电荷Q和磁荷P均是超前时间v 的函数, Λ为宇宙常数.

如果忽略检测场对时空的反作用的话, 那么自旋为1/2粒子在固定的属于Petrov D-型弯曲时空(8.2.1)中的动力学行为由四个耦合的Chandrasekhar-Dirac方程描述. 在Newman-Penrose表述中, 其旋量形式为

$$
\begin{aligned}
&(D + \epsilon - \rho)F_1 + (\overline{\delta} + \bar{\pi} - \alpha)F_2 = \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}G_1\,,\\
&(\Delta + \mu - \gamma)F_2 + (\delta + \beta - \tau)F_1 = \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}G_2\,,\\
&(D + \epsilon^* - \rho^*)G_2 - (\delta + \bar{\pi}^* - \alpha^*)G_1 = \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}F_2\,,\\
&(\Delta + \mu^* - \gamma^*)G_1 - (\overline{\delta} + \beta^* - \tau^*)G_2 = \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}}F_1\,,
\end{aligned}
\tag{8.3.1}
$$

式中μ_0为Dirac粒子的质量. 为了写出方程(8.3.1)的明显表达式, 这里选取一个与上节基本相同的复零标架系$\{\mathbf{l}, \mathbf{n}, \mathbf{m}, \overline{\mathbf{m}}\}$使之满足伪正交条件$\mathbf{l}\cdot\mathbf{n} = -\mathbf{m}\cdot\overline{\mathbf{m}} = 1$. 于是在这样选取的零标架系中, Kinnersley黑洞的协变1-形式基、相应的方向导数以及非零的NP旋系数均与上节中给出的表达式相同. 将所需的旋系数和方向导数代入Dirac方程(8.3.1)后, 可以得到

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{D}_1 F_1 + \frac{1}{\sqrt{2}r}\big(\mathcal{L}_{1/2} - r^2 f \mathcal{D}_2\big) F_2 &= \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}} G_1 \,, \\
\big(\partial_v + G\mathcal{D}_1 + G_{,r}/2\big) F_2 + \frac{1}{\sqrt{2}r}\big(\mathcal{L}^\dagger_{1/2} - r^2 f \mathcal{D}_1\big) F_1 &= \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}} G_2 \,, \\
-\mathcal{D}_1 G_2 - \frac{1}{\sqrt{2}r}\big(\mathcal{L}^\dagger_{1/2} - r^2 f \mathcal{D}_2\big) G_1 &= \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}} F_2 \,, \\
\big(\partial_v + G\mathcal{D}_1 + G_{,r}/2\big) G_1 - \frac{1}{\sqrt{2}r}\big(\mathcal{L}_{1/2} - r^2 f \mathcal{D}_1\big) G_2 &= \frac{i\mu_0}{\sqrt{2}} F_1 \,, \qquad (8.3.2)
\end{aligned}
$$

式中算符$\mathcal{D}_n$, $\mathcal{L}_n$和$\mathcal{L}^\dagger_n$的定义与上节完全一致.

进一步作代换

$$
F_1 = \sqrt{2} r P_1 \,, \quad P_2 = F_2 \,, \qquad Q_1 = G_1 \,, \quad Q_2 = \sqrt{2} r G_2
$$

后, 方程(8.3.2)成为

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{D}_0 P_1 + \big(\mathcal{L}_{1/2} - r^2 f \mathcal{D}_2\big) P_2 &= i\mu_0 r Q_1 \,, \\
r^2\big(2\partial_v + 2G\mathcal{D}_1 + G_{,r}\big) P_2 + \big(\mathcal{L}^\dagger_{1/2} - r^2 f \mathcal{D}_0\big) P_1 &= i\mu_0 r Q_2 \,, \\
-\mathcal{D}_0 Q_2 - \big(\mathcal{L}^\dagger_{1/2} - r^2 f \mathcal{D}_2\big) Q_1 &= i\mu_0 r P_2 \,, \\
r^2\big(2\partial_v + 2G\mathcal{D}_1 + G_{,r}\big) Q_1 - \big(\mathcal{L}_{1/2} - r^2 f \mathcal{D}_0\big) Q_2 &= i\mu_0 r P_1 \,. \qquad (8.3.3)
\end{aligned}
$$

尽管方程(8.3.3)不能退耦, 为了考察自旋为1/2粒子的Hawking辐射, 人们只须关心旋量波函数在视界附近的渐近行为. 由于Dirac方程(8.3.1)具有复共轭对称性, 即如果将G_1, G_2分别等同于F_2^*, $-F_1^*$, 则该方程仍然成立, 所以只需考虑一对分量(P_1, P_2)即可. 因为这里所考虑的Kinnersley黑洞关于φ-轴是对称的, 所以可定义与上节完全相同的广义乌龟坐标变换

$$
r_* = r + \frac{1}{2\kappa}\ln[r - r_H(v,\theta)] \,, \qquad v_* = v - v_0 \,, \quad \theta_* = \theta - \theta_0 \,.
$$

方程(8.3.3)在广义乌龟坐标变换下, 并取$r \to r_H(v_0, \theta_0)$, $v \to v_0$和$\theta \to \theta_0$极限后, 在视界附近有如下渐近形式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r_*} P_1 + (r_{H,\theta} + r_H^2 f)\frac{\partial}{\partial r_*} P_2 &= 0 \,, \\
-(r_{H,\theta} + r_H^2 f)\frac{\partial}{\partial r_*} P_1 + 2r_H^2 (G - r_{H,v})\frac{\partial}{\partial r_*} P_2 &= 0 \,. \qquad (8.3.4)
\end{aligned}
$$

对于另一对分量Q_1和Q_2, 存在类似的关系式. 若P_1和P_2有非平凡解— 导数$\frac{\partial}{\partial r_*}P_1$和$\frac{\partial}{\partial r_*}P_2$不为零的存在条件为方程(8.3.4)的行列式为零, 即

$$2G - 2r_{H,v} + r_H^2 f^2 + 2f r_{H,\theta} + \frac{r_{H,\theta}^2}{r_H^2} = 0\,, \tag{8.3.5}$$

式中G和f均在$r = r_H(v_0, \theta_0)$, $v = v_0$和$\theta = \theta_0$处取值.

方程(8.3.5)决定事件视界的位置, 可以用不同方法导出, 均给出完全一致的结果. 它既可从零曲面条件$g^{\mu\nu}\partial_\mu F \partial_\nu F = 0$和$F(v, r, \theta) = 0$(即$r = r(v, \theta)$)直接导出, 又可由对零曲面方程作GTCT处理给出. 容易看出视界位置r_H不仅依赖于时间v, 而且也与θ有关, 表明事件视界位置和形状随时间而变化.

现在我们来研究Dirac方程的二阶形式在视界附近的渐近行为. 因为在方程(8.3.3) 中可令$Q_2 = -P_1^*$和$Q_1 = P_2^*$, 因此只需处理分量(P_1, P_2), 这将使计算工作量减半. 直接计算或通过微扰论可得出二个旋量分量P_1和P_2满足的二阶方程为

$$\begin{aligned}
&\left[r^2(2\partial_v + 2G\mathcal{D}_1 + G_{,r})\mathcal{D}_0 + (\mathcal{L}_{1/2} - r^2 f \mathcal{D}_0)(\mathcal{L}_{1/2}^\dagger - r^2 f \mathcal{D}_0) - \mu_0^2 r^2\right] P_1 \\
&\quad + 2r^2 \Big\{ \left[(2rG - r^2 G_{,r}) f + r^2 f_{,v} + G_{,\theta}\right](\partial_r + 1/r) + r f_{,v} + G_{,r\theta}/2 \\
&\quad + (G - r^2 G_{,rr}/2) f \Big\} P_2 + i\mu_0 r^2 (f Q_2 + 2G Q_1) = 0
\end{aligned} \tag{8.3.6}$$

和

$$\begin{aligned}
&\left[r^2 \mathcal{D}_2(2\partial_v + 2G\mathcal{D}_1 + G_{,r}) + (\mathcal{L}_{1/2}^\dagger - r^2 f \mathcal{D}_2)(\mathcal{L}_{1/2} - r^2 f \mathcal{D}_2) - \mu_0^2 r^2\right] P_2 \\
&\quad + i\mu_0 (r^2 f Q_1 - Q_2) = 0\,.
\end{aligned} \tag{8.3.7}$$

因为Hawking辐射与粒子的质量无关, 所以不必关心方程(8.3.6)和(8.3.7) 中与质量μ_0有关的项, 但是在分量P_1的二阶方程中有一项与旋系数ν成正比的项$\partial_r P_2$, 使得该方程在作GTCT处理后有一项与ν有关的一阶导数项$\frac{\partial}{\partial r_*} P_2$. 这一项只能利用关系式(8.3.4)中的任何一个才能换掉, 使P_1满足的二阶方程是一个单一分量的方程. 这是考虑对一阶方程(8.3.3)作GTCT处理的原因之一, 另一个原因来自于自洽性的要求, 因为Dirac旋量波函数必须同时满足一阶的和二阶的方程.

对方程(8.3.6)和(8.3.7)作GTCT处理, 经过稍为繁杂的计算后, 得到它们在视界附近的渐近形式为

$$\Big\{\Big[\frac{A}{2\kappa}+2r_H^2(2G-r_{H,v})+2r_H^4f^2+2fr_H^2r_{H,\theta}\Big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+2r_H^2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}$$
$$-2\big(fr_H^2+r_{H,\theta}\big)\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}+\Big[-A+r_H^2G_{,r}+2r_HG$$
$$+2r_H^3f^2-2r_H^2f\cot\theta_0-\cot\theta_0 r_{H,\theta}-r_{H,\theta\theta}\Big]\frac{\partial}{\partial r_*}\Big\}P_1$$
$$+2r_H^2\big[(2r_HG-r_H^2G_{,r})f+r_H^2f_{,v}+G_{,\theta}\big]\frac{\partial}{\partial r_*}P_2=0 \qquad (8.3.8)$$

和

$$\Big\{\Big[\frac{A}{2\kappa}+2r_H^2(2G-r_{H,v})+2r_H^4f^2+2fr_H^2r_{H,\theta}\Big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+2r_H^2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}$$
$$-2\big(fr_H^2+r_{H,\theta}\big)\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}+\Big[-A+3r_H^2G_{,r}+r_H(6G-4r_{H,v})$$
$$+6r_H^3f^2-2r_H^2f\cot\theta_0+(4fr_H-\cot\theta_0)r_{H,\theta}-r_{H,\theta\theta}\Big]\frac{\partial}{\partial r_*}\Big\}P_2=0\,. \qquad (8.3.9)$$

利用视界面方程(8.3.5), 可以知道方程(8.3.8)和(8.3.9) 中的系数A为一个0/0-型不定式. 用L' Hôspital法则求得其结果为

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\substack{r\to r_H\\ v\to v_0\\ \theta\to\theta_0}}\frac{2r^2(G-r_{H,v})+r^4f^2+2fr^2r_{H,\theta}+r_{H,\theta}^2}{r-r_H}\\ &= 2r_H^2G_{,r}+2r_H^3f^2-2r_{H,\theta}^2/r_H\,. \end{aligned} \qquad (8.3.10)$$

现在我们选取可调参数κ使之满足

$$\begin{aligned} r_H^2 &\equiv \frac{A}{2\kappa}+2r_H^2(2G-r_{H,v})+2r_H^4f^2+2fr_H^2r_{H,\theta}\\ &= \frac{r_H^3G_{,r}+r_H^4f^2-r_{H,\theta}^2}{\kappa r_H}+2Gr_H^2+r_H^4f^2-r_{H,\theta}^2\,, \end{aligned} \qquad (8.3.11)$$

可得到视界的表面温度

$$\kappa=\frac{r_H^2G_{,r}+r_H^3f^2-r_{H,\theta}^2/r_H}{r_H^2(1-2G)-r_H^4f^2+r_{H,\theta}^2}\,. \qquad (8.3.12)$$

在这样调节系数κ后, 利用关系式(8.3.4)并将系数A的表达式代入方程(8.3.8)和(8.3.9)后, 得到

$$r_H^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}\Big)P_1-2\big(fr_H^2+r_{H,\theta}\big)\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}P_1+\Big\{\frac{2r_{H,\theta}^2}{r_H}$$
$$-r_H^2G_{,r}+2r_HG-2r_H^2f\cot\theta_0-\cot\theta_0 r_{H,\theta}-r_{H,\theta\theta}$$
$$+\frac{r_{H,\theta}+r_H^2f}{G-r_{H,v}}\big[(2r_HG-r_H^2G_{,r})f+r_H^2f_{,v}+G_{,\theta}\big]\Big\}\frac{\partial}{\partial r_*}P_1=0 \qquad (8.3.13)$$

和

$$
\begin{aligned}
& r_H^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}\Big)P_2-2\big(fr_H^2+r_{H,\theta}\big)\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}P_2 \\
& +\Big\{\frac{2r_{H,\theta}^2}{r_H}+r_H^2G_{,r}+r_H(6G-4r_{H,v})+4r_H^3f^2 \\
& -2r_H^2f\cot\theta_0+(4fr_H-\cot\theta_0)r_{H,\theta}-r_{H,\theta\theta}\Big\}\frac{\partial}{\partial r_*}P_2 \\
& =r_H^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}\Big)P_2-2\big(fr_H^2+r_{H,\theta}\big)\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}P_2+\Big\{r_H^2G_{,r} \\
& +2r_HG+2r_H^3f^2-2r_H^2f\cot\theta_0-\cot\theta_0r_{H,\theta}-r_{H,\theta\theta}\Big\}\frac{\partial}{\partial r_*}P_2=0\,. \quad (8.3.14)
\end{aligned}
$$

在得到方程(8.3.14)的过程中，我们已利用了视界面方程(8.3.5).

在除以r_H^2后，方程(8.3.13)和(8.3.14)可纳入视界附近的一个统一的标准波方程

$$
\Big(\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}-2B\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}+2C\frac{\partial}{\partial r_*}\Big)\Psi=0\,, \qquad (8.3.15)
$$

式中系数B和C可视为有限实常数，$B=f+r_{H,\theta}/r_H^2$.

对于$\Psi=P_1$,

$$
\begin{aligned}
2C=&\frac{2G}{r_H}-G_{,r}-\Big(2f+\frac{r_{H,\theta}}{r_H^2}\Big)\cot\theta_0+\frac{2r_{H,\theta}^2}{r_H^3}-\frac{r_{H,\theta\theta}}{r_H^2} \\
&+\frac{f+r_{H,\theta}/r_H^2}{G-r_{H,v}}\big[(2r_HG-r_H^2G_{,r})f+r_H^2f_{,v}+G_{,\theta}\big]\,;
\end{aligned}
$$

对于$\Psi=P_2$,

$$
2C=\frac{2G}{r_H}+G_{,r}+2r_Hf^2-\Big(2f+\frac{r_{H,\theta}}{r_H^2}\Big)\cot\theta_0-\frac{r_{H,\theta\theta}}{r_H^2}\,.
$$

方程(8.3.15)描述Dirac粒子脱离视界后的独立演化，而事件视界则按方程(8.3.5) 演化. 因为我们研究的是Dirac场在视界附近的行为，波方程中的系数B和C均在视界($r=r_H(v_0,\theta_0)$, $v=v_0$, $\theta=\theta_0$)处取值，所以可以把它们近似地视为常数.

方程(8.3.15)经分离变量$\Psi=R(r_*)\Theta(\theta_*)e^{i(m\varphi-\omega v_*)}$后变成

$$
\Theta'=\lambda\Theta\,, \qquad R''=2(i\omega-C_0)R'\,, \qquad (8.3.16)
$$

式中$C_0 = C - \lambda B$, λ为分离变量过程中引入的一个实常数. λ应取为实数是考虑到当过渡到球对称情形时, 角向部分应退化为自旋权重$s = 1/2$的旋量球谐函数(旋球函数). 另外, 当黑洞的加速度很小($a \approx 0$)时, 黑洞近似为球形, 旋量波函数对角向的依赖应近似于旋球函数.

方程(8.3.16)的解为

$$\Theta = e^{\lambda\theta_*}, \qquad R = R_1 e^{2(i\omega - C_0)r_*} + R_0\,, \tag{8.3.17}$$

入射波和出射波分别为

$$\begin{aligned}&\Psi_{\rm in} = e^{i(m\varphi - \omega v_*) + \lambda\theta_*}\,,\\ &\Psi_{\rm out}(r > r_H) = \Psi_{\rm in} e^{2(i\omega - C_0)r_*}\,.\end{aligned} \tag{8.3.18}$$

采用DRS方法, 沿下半复r-平面把出射波$\Psi_{\rm out}(r > r_H)$ 从视界外解析延拓到视界内为

$$\widetilde{\Psi_{\rm out}}(r < r_H) = \Psi_{\rm out}(r > r_H) e^{\pi(\omega + iC_0)/\kappa}\,, \tag{8.3.19}$$

并得到出射波在视界上的相对散射几率和Driac粒子的热辐射谱分别为

$$\left|\frac{\Psi_{\rm out}}{\widetilde{\Psi_{\rm out}}}\right|^2 = e^{-2\pi\omega/\kappa}, \quad \langle\mathcal{N}_\omega\rangle \simeq \frac{1}{e^{\omega/T_H} + 1}, \tag{8.3.20}$$

其中Hawking温度$T_H = \kappa/(2\pi)$的明显表达式为

$$T_H = \frac{1}{4\pi r_H} \times \frac{M r_H - r_H^3 a\cos\theta_0 + (2r_H a\cos\theta_0 - 1)(Q^2 + P^2) - \frac{\Lambda}{3} r_H^4 - r_{H,\theta}^2}{M r_H + r_H^3 a\cos\theta_0 + (2r_H a\cos\theta_0 - \frac{1}{2})(Q^2 + P^2) - \frac{\Lambda}{6} r_H^4 + \frac{r_{H,\theta}^2}{2}}\,. \tag{8.3.21}$$

与视界位置r_H一样, 温度κ不仅依赖于时间v, 同时也依赖于角度θ. 这里得到的r_H和κ与已有的结果完全一致.

当黑洞不带电磁荷($Q = P = 0$)且宇宙学常数为零时, 本节的研究即为文献[272]所分析过的情形. 此外, 当粒子质量为零, 即为前节所研究过的Weyl中微子的Hawking蒸发. 比较这两节的分析, 结果表明Hawking辐射确实与粒子的质量无关.

作为对比, 现在简要地讨论标量粒子的Hawking辐射. 质量为μ_0的标量场方程: $(\Box + \mu_0^2)\Phi = 0$在Kinnersley时空(8.2.1)中明显写出来为

$$\left[(2r^2G+r^4f^2)\partial_r^2+2r^2\partial_{vr}^2-2r^2f\partial_{r\theta}^2+\partial_\theta^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2+(\cot\theta-2rf)\partial_\theta\right.$$
$$\left.+2r\partial_v+(2r^2G_{,r}+4rG+4r^3f^2-2r^2f\cot\theta)\partial_r-\mu_0^2r^2\right]\Phi=0\,,\quad(8.3.22)$$

与前面的讨论类似，得到该方程在视界附近的渐近形式为

$$r_H^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}\Big)\Phi-2\big(fr_H^2+r_{H,\theta}\big)\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}\Phi+\Big[\frac{2r_{H,\theta}^2}{r_H}+4r_HG+2r_H^3f^2$$
$$-2r_H(r_{H,v}-fr_{H,\theta})-2r_H^2f\cot\theta_0-\cot\theta_0r_{H,\theta}-r_{H,\theta\theta}\Big]\frac{\partial}{\partial r_*}\Phi=0\,,\quad(8.3.23)$$

再利用视界面方程(8.3.5)可将方程(8.3.23)纳入标准形式的波方程(8.3.15)，其中B的表达式如前，而C对于$\Psi=\Phi$为

$$2C=\frac{2G}{r_H}+r_Hf^2-(2f+\frac{r_{H,\theta}}{r_H^2})\cot\theta_0-\frac{r_{H,\theta\theta}}{r_H^2}+\frac{r_{H,\theta}^2}{r_H^3}\,.$$

仿照前面的分析，可得到标量粒子的热辐射谱为

$$\langle\mathcal{N}_\omega\rangle\simeq\frac{1}{e^{\omega/T_H}-1}\,,\quad(8.3.24)$$

其中Hawking温度$T_H=\kappa/(2\pi)$的表达式见(8.3.21)式.

需说明的是，由标量场方程作广义乌龟坐标变换处理，也可以得到相同的视界面方程(8.3.5)和表面引力κ. 对于变加速直线运动Kinnnersley黑洞，其事件视界位置和表面有效温度随时间变化，而且依赖于角度θ. 这一点与动态Kerr(-Newman)黑洞完全类似. 从Dirac粒子的Fermi谱(8.3.20)和标量粒子的Bose谱(8.3.24)可看出，除自旋统计的不同之外，在这两者的热辐射谱中没有看到新的量子热效应出现.

§8.4 任意加速Kinnersley黑洞的Hawking辐射 — Dirac粒子

这一节用GTCT法讨论任意加速Kinnersley黑洞的量子热效应，表明在Dirac粒子的热辐射谱中有一项新的效应，这个效应来自粒子的自旋与黑洞的角向形变加速之间的相互作用. 这种自旋-加速耦合效应不出现在标量粒子的Hawking辐射谱中.

动态非球对称的变加速Kinnersley黑洞, 又称为Kinnersley"光子火箭"解, 描述一个任意加速的点质量的外部引力场. 在超前的Eddington-Finkelstein (EF)坐标系中, Kinnersley"火箭"度规的线元可写为

$$ds^2 = 2dv\big[Gdv - dr - r^2(fd\theta + g\sin^2\theta d\varphi)\big] - r^2\big(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\big)\,, \qquad (8.4.1)$$

其中$2G = 1-2M(v)/r-2ar\cos\theta-r^2W^*W$, $W = f+ig\sin\theta$, $W^* = f-ig\sin\theta$, $f = b\sin\varphi+c\cos\varphi-a\sin\theta$, $g = (b\cos\varphi-c\sin\varphi)\cot\theta$. 度规(8.4.1)按Petrov分类属于D-型. 任意函数$M(v)$描述源的质量(随超前时间v变化的一个函数), $a(v)$、$b(v)$和$c(v)$为加速参数: a为加速度大小, b和c为加速度在角度方向上改变率.

一般地, 一个蒸发黑洞的时空几何由三类曲面刻划: 类时极限面(TLS), 表观视界(AH)和事件视界(EH). 根据York的观点[287], 一个动力学黑洞的视界可以在流明的一级近似下求得, 只要注意到下述条件即可: **i)** 表观视界为最外层的"陷获面", 使类光(零)测地线汇(或由v参数化的类光(零)射线)的膨胀$\vartheta \approx 0$; **ii)** 事件视界为零(类光)曲面, 此曲面上类光测地线汇的加速度$d^2r/dv^2 \approx 0$, 或者等价地, 因为它们必须严格类光, 可以通过要求$d\vartheta/dv \approx 0$而由Raychadhuri方程确定; 最后, **iii)** 类时极限面被定义为满足$g_{vv} = 0$的曲面.

一个普遍公认的观点是事件视界必须是一个零曲面, 且被定义为出射光子永远不能达到任意大距离的最外位置. 在动态黑洞时空中, 事件视界仍应为类光(零)曲面, 且满足零曲面条件: $g^{\mu\nu}\partial_\mu F\partial_\nu F = 0$. 由此零曲面条件确定的事件视界实际上是一个局部事件视界(不是从整体定义出发). 下面将采用这个局部定义并用不同的方法导出决定任意加速Kinnersley黑洞局部事件视界的位置. 我们发现每一个方法均能一致地给出相同的结果.

首先利用零曲面条件来寻找Kinnersley时空的局部事件视界. 从零曲面方程$F(v,r,\theta,\varphi) = 0$, 亦即$r = r(v,\theta,\varphi)$易得到

$$\partial_v F + \partial_r F\partial_v r = 0\,, \quad \partial_\theta F + \partial_r F\partial_\theta r = 0\,, \quad \partial_\varphi F + \partial_r F\partial_\varphi r = 0\,. \qquad (8.4.2)$$

将(8.4.2)式代入零曲面方程$g^{\mu\nu}\partial_\mu F\partial_\nu F = 0$在Kinnersley时空中的明显表达式

$$\begin{aligned}\big(2G + r^2W^*W\big)(\partial_r F)^2 + 2\partial_r F\big(\partial_v F - f\partial_\theta F - g\partial_\varphi F\big)\\ +\frac{1}{r^2}(\partial_\theta F)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}(\partial_\varphi F)^2 = 0\,,\end{aligned} \qquad (8.4.3)$$

可以得到

$$2G + r^2W^*W - 2\partial_v r + 2f\partial_\theta r + 2g\partial_\varphi r + \frac{(\partial_\theta r)^2}{r^2} + \frac{(\partial_\varphi r)^2}{r^2\sin^2\theta} = 0\,.$$

博士学位论文
DOCTORAL DISSERTATION

局部事件视界为满足上述方程即

$$1-\frac{2M}{r_H}-2ar_H\cos\theta-2r_{H,v}+2fr_{H,\theta}+2gr_{H,\varphi} +\left(\frac{r_{H,\theta}}{r_H}\right)^2+\left(\frac{r_{H,\varphi}}{r_H\sin\theta}\right)^2=0 \tag{8.4.4}$$

的一个超曲面$r=r_H(v,\theta,\varphi)$. 其中$r_{H,v}=\partial_v r_H$, $r_{H,\theta}=\partial_\theta r_H$和$r_{H,\varphi}=\partial_\varphi r_H$可视为描述视界演化的参数.

当$a=b=c=0$但$M\neq 0$时, Vaidya黑洞的事件视界位于$r_H=2M/(1-2r_{H,v})$; 当$M=b=c=0$且a为常数时, 作匀加速直线运动观测者的Rindler视界满足

$$1-2ar_H\cos\theta-2ar_{H,\theta}\sin\theta+\frac{r_{H,\theta}^2}{r_H^2}=0\,,$$

它是一个旋转抛物面$r_H=1/a(\cos\theta\pm 1)$.

在$M(v)$、$a(v)$、$b(v)$和$c(v)$不等于零的情形, 方程(8.4.4)一般来说有三个根. 在这个一般情形, 因为分析显得稍为复杂, 我们在此不作讨论. Kinnersley 时空(8.4.1)应存在两类事件视界: Rindler-型视界和Schwarzschild-型视界, 它们不仅依赖于v, 而且与θ, φ有关. 这意味着事件视界和黑洞的形状随时间而变化.

其次采用广义乌龟坐标变换法导出局部事件视界. 因为作任意加速运动的Kinnersley黑洞不存在Killing矢量, 故可以定义最一般形式的GTCT如下:

$$r_*=r+\frac{1}{2\kappa}\ln\left(r-r_H\right)\,,\quad v_*=v-v_0\,,\quad \theta_*=\theta-\theta_0\,,\quad \varphi_*=\varphi-\varphi_0\,, \tag{8.4.5}$$

即

$$\begin{aligned} dr_* &= dr+\frac{1}{2\kappa(r-r_H)}\left(dr-r_{H,v}dv-r_{H,\theta}d\theta-r_{H,\varphi}d\varphi\right)\,,\\ dv_* &= dv\,,\qquad d\theta_*=d\theta\,,\qquad d\varphi_*=d\varphi\,, \end{aligned}$$

其中$r_H=r_H(v,\theta,\varphi)$为事件视界的位置, κ为一个待定的可调节参数且在乌龟坐标变换下为一常数. 所有参数v_0、θ_0和φ_0 为刻划黑洞初始状态的任意常数.

对零曲面方程(8.4.3)应用GTCT(8.4.5), 并取$r\to r_H(v_0,\theta_0,\varphi_0)$, $v\to v_0$, $\theta\to\theta_0$和$\varphi\to\varphi_0$极限, 通过令$(\frac{\partial}{\partial r_*}F)^2$项前面的括号中的系数为零, 可得到事件视界面方程

$$2G - 2r_{H,v} + r_H^2 W^* W + 2f r_{H,\theta} + 2g r_{H,\varphi} + \frac{r_{H,\theta}^2}{r_H^2} + \frac{r_{H,\varphi}^2}{r_H^2 \sin^2\theta_0} = 0\,. \tag{8.4.6}$$

方程(8.4.6)正是当$v = v_0$, $\theta = \theta_0$和$\varphi = \varphi_0$时的(同一个)方程(8.4.4). 注意我们已作了这样的约定: 当作了GTCT处理并取趋于事件视界的极限后, 每一个导数项前所有系数均在事件视界$r_H = r_H(v_0, \theta_0, \varphi_0)$处取值, 亦即$G$、$f$、$g$和$W$在$v = v_0$, $\theta = \theta_0$和$\varphi = \varphi_0$处取值.

因为这里仅讨论黑洞慢蒸发的情形, 以后只需考虑非常接近于事件视界的初始状态的情况, 即当$v \approx v_0$, $\theta \approx \theta_0$和$\varphi \approx \varphi_0$时$r_H \approx r_H(v_0, \theta_0, \varphi_0)$. 这个要求来源于GTCT方法是一个局部分析方法, 而后者源自这样一个事实— Hawking辐射来自事件视界附近的真空涨落.

现在我们来考察Kinnersley时空的量子热性质, 特别是Dirac电子和Klein-Gordon标量粒子的热辐射, 换而言之, 我们必须导出粒子从事件视界发射出来的热辐射谱. 为此先在Newman-Penrose(NP)表述中写出Dirac方程的旋量表示. 选取Kinnersley黑洞中的一个复的零标架系使其方向导数为

$$\begin{aligned}
D &= -\partial_r\,, \qquad \Delta = \partial_v + G\partial_r\,, \\
\delta &= \frac{1}{\sqrt{2}r}\Big(-r^2 W\partial_r + \partial_\theta + \frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi\Big)\,, \\
\overline{\delta} &= \frac{1}{\sqrt{2}r}\Big(-r^2 W^*\partial_r + \partial_\theta - \frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi\Big)\,.
\end{aligned} \tag{8.4.7}$$

不难求出该零标架中非零的复NP旋系数如下: [记$G_{,r} = dG/dr$等等]

$$\begin{aligned}
&\rho = \frac{1}{r}\,, \quad \mu = \frac{G}{r} + ig\sin\theta\tan\theta\,, \quad \gamma = (-G_{,r} + ig\sin\theta\tan\theta)/2\,, \\
&\tau = \frac{W}{\sqrt{2}}\,, \quad \tilde{\pi} = -\frac{W^*}{\sqrt{2}}\,, \quad \alpha = -\frac{\cot\theta}{2\sqrt{2}r} + \frac{W^*}{\sqrt{2}}\,, \quad \beta = \frac{\cot\theta}{2\sqrt{2}r}\,, \\
&\nu = \frac{1}{\sqrt{2}r}\Big[(2rG - r^2 G_{,r})W^* + r^2 W^*_{,v} + G_{,\theta} - \frac{iG_{,\varphi}}{\sin\theta}\Big]\,.
\end{aligned} \tag{8.4.8}$$

在弯曲时空中, 质量为μ_0、自旋为1/2的Dirac旋量粒子的动力学行为由四个耦合Chandrasekhar-Dirac方程描述. 我们已在前面给出它在NP表述中的旋量形式. 将所需的NP旋系数和方向导数代入Dirac方程并作代换$P_1 = \sqrt{2}rF_1$, $P_2 = F_2$, $Q_1 = G_1$, $Q_2 = \sqrt{2}rG_2$后得到

$$-\mathcal{D}_0 P_1 + \left(\mathcal{L}_{1/2} - r^2 W^* \mathcal{D}_2\right) P_2 = i\mu_0 r Q_1 ,$$
$$2r^2 \mathcal{B}_1 P_2 + \left(\mathcal{L}^\dagger_{1/2} - r^2 W \mathcal{D}_0\right) P_1 = i\mu_0 r Q_2 ,$$
$$-\mathcal{D}_0 Q_2 - \left(\mathcal{L}^\dagger_{1/2} - r^2 W \mathcal{D}_2\right) Q_1 = i\mu_0 r P_2 ,$$
$$2r^2 \mathcal{B}^\dagger_1 Q_1 - \left(\mathcal{L}_{1/2} - r^2 W^* \mathcal{D}_0\right) Q_2 = i\mu_0 r P_1 , \qquad (8.4.9)$$

式中算符$\mathcal{L}_n$和$\mathcal{L}^\dagger_n$的定义与前节一致, $\mathcal{D}_n = \partial_r + n/r$, $\mathcal{B}_n = \partial_v + G\mathcal{D}_n + (G_{,r} + ig\sin\theta\tan\theta)/2$.

由于Chandrasekhar-Dirac方程(8.4.9)在把Q_1, Q_2分别与P_2^*, $-P_1^*$等同后仍能成立, 所以只需研究一对分量(P_1, P_2)即可. 虽然该方程不能退耦, 但对于研究Hawking辐射问题来说, 人们只需关心旋量场在视界附近的渐近行为. 在广义乌龟坐标变换(8.4.5)下并取$r \to r_H(v_0, \theta_0, \varphi_0)$, $v \to v_0$, $\theta \to \theta_0$和$\varphi \to \varphi_0$极限后, P_1和P_2的一阶方程在视界附近化为

$$\frac{\partial}{\partial r_*} P_1 + \left(r_{H,\theta} - \frac{i}{\sin\theta_0} r_{H,\varphi} + r_H^2 W^*\right) \frac{\partial}{\partial r_*} P_2 = 0 ,$$
$$\left(r_{H,\theta} + \frac{i}{\sin\theta_0} r_{H,\varphi} + r_H^2 W\right) \frac{\partial}{\partial r_*} P_1 - 2r_H^2 \left(G - r_{H,v}\right) \frac{\partial}{\partial r_*} P_2 = 0 . \qquad (8.4.10)$$

如果方程组(8.4.10)中的导数$\frac{\partial}{\partial r_*}P_1$和$\frac{\partial}{\partial r_*}P_2$不为零, 那么$P_1$和$P_2$有非平凡解的存在条件是其行列式为零, 这就给出上面的视界面方程(8.4.6). 有趣的是如果对另一对分量(Q_1, Q_2)作类似处理, 也会给出同一个方程(8.4.6)和类似于方程(8.4.10)的关系式. 这可看作求事件视界位置的另一种方法.

为了考察自旋1/2粒子的Hawking辐射, 我们还需研究二阶Dirac 方程在视界附近的渐近形式. 经直接计算可得到P_1和P_2分量满足的Dirac方程的二阶形式为

$$\begin{aligned}&\left[2r^2\mathcal{B}_1\mathcal{D}_0 + (\mathcal{L}_{1/2} - r^2W^*\mathcal{D}_0)(\mathcal{L}^\dagger_{1/2} - r^2W\mathcal{D}_0) - \mu_0^2 r^2\right]P_1\\ &\quad + i\mu_0 r^2\left[W^*Q_2 + 2(G + igr\sin\theta\tan\theta)Q_1\right] + r^2\Big\{2\Big[G_\theta - \frac{iG_\varphi}{\sin\theta}\\ &\quad + r^2W^*_{,v} + (2rG - r^2G_{,r})W^*\Big](\partial_r + 1/r) + W^*(2G - r^2G_{,rr})\\ &\qquad + 2rW^*_{,v} + G_{,r\theta} - \frac{iG_{r\varphi}}{\sin\theta} + ig\sin\theta - f - a\sin\theta\Big\}P_2 = 0 \end{aligned} \qquad (8.4.11)$$

和

$$\begin{aligned}&\left[2r^2\mathcal{D}_2\mathcal{B}_1 + (\mathcal{L}^\dagger_{1/2} - r^2W\mathcal{D}_2)(\mathcal{L}_{1/2} - r^2W^*\mathcal{D}_2) - \mu_0^2 r^2\right]P_2\\ &\quad + i\mu_0(r^2WQ_1 - Q_2)P_1 = 0 . \end{aligned} \qquad (8.4.12)$$

质量为μ_0的标量场方程$(\Box+\mu_0^2)\Phi=0$在Kinnersley时空中的明显形式为

$$\begin{aligned}&\big[(2r^2G+r^4W^*W)\partial_r^2+2r^2(\partial_{vr}^2-f\partial_{r\theta}^2-g\partial_{r\varphi}^2)+\partial_\theta^2\\&\quad+\frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2+(2r^2G_{,r}+4rG+4r^3W^*W-2r^2f_{,\theta})\partial_r\\&\quad+(\cot\theta-2rf)\partial_\theta+2r(\partial_v-g\partial_\varphi)-\mu_0^2r^2\big]\Phi=0\,.\end{aligned}\tag{8.4.13}$$

对方程(8.4.11-8.4.13)作类似于一阶方程的处理, 经过稍为冗长的计算后得到它们在视界附近的渐近形式为

$$\begin{aligned}&\mathcal{K}P_1+\Big[-A+r_H^2G_{,r}+2r_HG+2r_H^3W^*W+2igr_H^2\sin\theta_0\tan\theta_0-2r_H^2f_{,\theta}\\&+r_H^2\frac{ig}{\cos\theta_0}+\cot\theta_0\big(-r_{H,\theta}+\frac{ir_{H,\varphi}}{\sin\theta_0}\big)-\big(r_{H,\theta\theta}+\frac{r_{H,\varphi\varphi}}{\sin^2\theta_0}\big)\Big]\frac{\partial}{\partial r_*}P_1\\&+2r_H^2\Big[G_{,\theta}-\frac{i}{\sin\theta_0}G_{,\varphi}+r_H^2W_{,v}^*+W^*(2r_HG-r_H^2G_{,r})\Big]\frac{\partial}{\partial r_*}P_2=0\end{aligned}\tag{8.4.14}$$

和

$$\begin{aligned}&\mathcal{K}P_2+\Big[-A+3r_H^2G_{,r}+r_H(6G-4r_{H,v})+6r_H^3W^*W\\&-2r_H^2f_{,\theta}-r_H^2\frac{ig}{\cos\theta_0}+(4r_Hf-\cot\theta_0)r_{H,\theta}\\&+\big(4gr_H-\frac{i\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0}\big)r_{H,\varphi}-\big(r_{H,\theta\theta}+\frac{r_{H,\varphi\varphi}}{\sin^2\theta_0}\big)\Big]\frac{\partial}{\partial r_*}P_2=0\,,\end{aligned}\tag{8.4.15}$$

以及

$$\begin{aligned}&\mathcal{K}\Phi+\Big[-A+2r_H^2G_{,r}+4r_HG+4r_H^3W^*W-2r_H^2f_{,\theta}-2r_Hr_{H,v}\\&+2r_H(fr_{H,\theta}+gr_{H,\varphi})-r_{H,\theta}\cot\theta_0-\big(r_{H,\theta\theta}+\frac{r_{H,\varphi\varphi}}{\sin^2\theta_0}\big)\Big]\frac{\partial}{\partial r_*}\Phi=0\,.\end{aligned}\tag{8.4.16}$$

在上述方程中算符$\mathcal{K}$代表包含二阶导数的项

$$\begin{aligned}\mathcal{K}=&\Big[\frac{A}{2\kappa}+2r_H^2(2G-r_{H,v})+2r_H^4W^*W+2r_H^2(fr_{H,\theta}+gr_{H,\varphi})\Big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}\\&+2r_H^2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}-2\big(fr_H^2+r_{H,\theta}\big)\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}-2\big(gr_H^2+\frac{r_{H,\varphi}}{\sin^2\theta_0}\big)\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi_*}.\end{aligned}$$

由视界面方程(8.4.6)可知其中的系数A为一个0/0-型不定式, 利用L' Hôspital法则可求得其结果为

$$\begin{aligned}A&=\lim_{r\to r_H}\frac{2r^2(G-r_{H,v})+r^4W^*W+2r^2(fr_{H,\theta}+gr_{H,\varphi})+r_{H,\theta}^2+r_{H,\varphi}^2/\sin^2\theta}{r-r_H}\\&=2r_H^2G_{,r}+4r_H(G-r_{H,v})+4r_H^3W^*W+4r_H(fr_{H,\theta}+gr_{H,\varphi})\\&=2r_H^2G_{,r}+2r_H^3W^*W-2r_H^{-1}(r_{H,\theta}^2+r_{H,\varphi}^2/\sin^2\theta_0)\,.\end{aligned}\tag{8.4.17}$$

博士学位论文
DOCTORAL DISSERTATION

现在选取算符$\mathcal{K}$中的可调参数κ使之满足

$$r_H^2 \equiv \frac{A}{2\kappa} + 2r_H^2(2G - r_{H,v}) + 2r_H^4 W^* W + 2r_H^2(f r_{H,\theta} + g r_{H,\varphi}),$$

则可得到视界的表面引力

$$\kappa = \frac{r_H^2 G_{,r} + r_H^3 W^* W - r_H^{-1}(r_{H,\theta}^2 + r_{H,\varphi}^2/\sin^2\theta_0)}{r_H^2(1-2G) - r_H^4 W^* W + r_{H,\theta}^2 + r_{H,\varphi}^2/\sin^2\theta_0}. \tag{8.4.18}$$

在进行了这样的参数调节后，再利用关系式(8.4.10)和视界面方程(8.4.6)，可把方程(8.4.14-8.4.16)化为视界附近的统一形式的标准波动方程

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*} - 2C_3\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*} - 2\Omega\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi_*} + 2(C_2 + iC_1)\frac{\partial}{\partial r_*}\Big]\Psi = 0, \tag{8.4.19}$$

式中Ω, C_3, C_2和C_1可看作有限实常数. Ω的物理意义是它可理解为由于加速引起黑洞发生角向形变而产生的角速度,

$$\Omega = g + \frac{r_{H,\varphi}}{r_H^2\sin^2\theta_0}, \qquad C_3 = f + \frac{r_{H,\theta}}{r_H^2},$$

对于$\Psi = P_1$,

$$\begin{aligned}2(C_2 + iC_1) = &\frac{2G}{r_H} - G_{,r} + 2ig\sin\theta_0\tan\theta_0 - 2f_{,\theta} + \frac{ig}{\cos\theta_0}\\ &-\frac{\cot\theta_0}{r_H^2}\big(r_{H,\theta} - \frac{ir_{H,\varphi}}{\sin\theta_0}\big) - \frac{1}{r_H^2}\big(r_{H,\theta\theta} + \frac{r_{H,\varphi\varphi}}{\sin^2\theta_0}\big) + \frac{2}{r_H^3}\big(r_{H,\theta}^2 + \frac{r_{H,\varphi}^2}{\sin^2\theta_0}\big)\\ &+\frac{C_3 + i\Omega\sin\theta_0}{G - r_{H,v}}\big[r_H^2 W_{,v}^* + W^*(2r_H G - r_H^2 G_{,r}) + G_{,\theta} - \frac{i}{\sin\theta_0}G_{,\varphi}\big];\end{aligned} \tag{8.4.20}$$

对于$\Psi = P_2$,

$$\begin{aligned}2(C_2 + iC_1) = &\frac{2G}{r_H} + G_{,r} + 2r_H W^* W - 2f_{,\theta} - \frac{ig}{\cos\theta_0}\\ &-\frac{\cot\theta_0}{r_H^2}\big(r_{H,\theta} + \frac{ir_{H,\varphi}}{\sin\theta_0}\big) - \frac{1}{r_H^2}\big(r_{H,\theta\theta} + \frac{r_{H,\varphi\varphi}}{\sin^2\theta_0}\big);\end{aligned} \tag{8.4.21}$$

对于$\Psi = \Phi$, $C_1 = 0$,

$$\begin{aligned}2C_2 = &\frac{2G}{r_H} + r_H W^* W - 2f_{,\theta} - \frac{r_{H,\theta}}{r_H^2}\cot\theta_0\\ &-\frac{1}{r_H^2}\big(r_{H,\theta\theta} + \frac{r_{H,\varphi\varphi}}{\sin^2\theta_0}\big) + \frac{1}{r_H^3}\big(r_{H,\theta}^2 + \frac{r_{H,\varphi}^2}{\sin^2\theta_0}\big).\end{aligned} \tag{8.4.22}$$

方程(8.4.20)的表达式较为复杂, 但可以注意到其右边最后一项中方括号里的系数正比于$\nu(r_H)$ [旋系数ν在事件视界上的值].

因方程(8.4.19)中各个系数可近似视为常数, 故可把它当作常微分方程处理. 按$\Psi = R(r_*)\Theta(\theta_*)\Phi(\varphi_*)e^{-i\omega v_*}$分离变量后得到

$$\begin{aligned} &\Theta' = \lambda\Theta\,, \qquad \Phi' = (\sigma + im)\Phi\,, \\ &R'' = 2i(\omega + m\Omega - C_1 + iC_0)R'\,, \end{aligned} \tag{8.4.23}$$

式中$C_0 = C_2 - \lambda C_3 - \sigma\Omega$, λ为分离变量过程中引进的一个实常数, ω为粒子的能量, m为其角动量磁量子数. 方程(8.4.23) 的通解为

$$\begin{aligned} &\Theta = e^{\lambda\theta_*}\,, \qquad \Phi = e^{(\sigma+im)\varphi_*}\,, \\ &R = R_1 e^{2[i(\omega+m\Omega-C_1)-C_0]r_*} + R_0\,. \end{aligned} \tag{8.4.24}$$

因此方程(8.4.19)的入射波和出射波分别为:

$$\begin{aligned} &\Psi_{\rm in} = e^{-i\omega v_* + (\sigma+im)\varphi_* + \lambda\theta_*}\,, \\ &\Psi_{\rm out}(r > r_H) = \Psi_{\rm in} e^{2[i(\omega+m\Omega-C_1)-C_0]r_*}\,. \end{aligned} \tag{8.4.25}$$

采用DRS方案, 从下半复r-平面将不解析的出射波$\Psi_{\rm out}(r > r_H)$ 延拓到视界内为

$$\widetilde{\Psi_{\rm out}}(r < r_H) = \Psi_{\rm out}(r > r_H) e^{2[i(\omega+m\Omega-C_1)-C_0]r_*} e^{i\pi C_0/\kappa} e^{\pi(\omega+m\Omega-C_1)/\kappa}\,. \tag{8.4.26}$$

得到出射波在视界上的相对散射几率

$$\left|\frac{\Psi_{\rm out}}{\widetilde{\Psi_{\rm out}}}\right|^2 = e^{-2\pi(\omega+m\Omega-C_1)/\kappa}\,, \tag{8.4.27}$$

和粒子从黑洞事件视界发射的热辐射谱为

$$\langle\mathcal{N}(\omega)\rangle = \frac{\Gamma(\omega)}{e^{(\omega+m\Omega-C_1)/T_H} \pm 1}\,, \tag{8.4.28}$$

其中正号对应于Fermi-Dirac统计, 负号对应于Bose-Einstein分布, $\Gamma(\omega)$ 为粒子处于一定模式的势垒穿透因子. 上式中的Hawking温度$T_H = \kappa/(2\pi)$为

$$T_H = \frac{1}{4\pi r_H} \cdot \frac{M r_H - r_H^3 a\cos\theta_0 - r_{H,\theta}^2 - r_{H,\varphi}^2/\sin^2\theta_0}{M r_H + r_H^3 a\cos\theta_0 + (r_{H,\theta}^2 + r_{H,\varphi}^2/\sin^2\theta_0)/2}\,. \tag{8.4.29}$$

从该式可以看出温度T_H与视界位置r_H一样，不仅依赖于时间v，而且依赖于角度θ和φ.

在热辐射谱(8.4.28)中相互作用能量有两个部分，其一为因加速而产生的“转动能” $m\Omega$; 另一项来自电子的自旋与黑洞的因加速而导致角向形变产生的“角动量”. 在自旋-1/2粒子的热谱中有一个C_1项出现，而标量粒子的热谱中则没有这一项($C_1=0$). 这说明C_1项与粒子自旋有关.

从C_1的明显表达式

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{-C_3\sin\theta_0}{2(G-r_{H,v})}\Big[r_H^2 g_{,v}+(2r_HG-r_H^2G_{,r})g+\frac{G_{,\varphi}}{\sin^2\theta_0}\Big] \\ &\quad +\frac{\Omega\sin\theta_0}{2(G-r_{H,v})}\Big[r_H^2 f_{,v}+(2r_HG-r_H^2G_{,r})f+G_{,\theta}\Big] \\ &\quad +g\sin\theta_0\tan\theta_0+\frac{g}{2\cos\theta_0}+\frac{r_{H,\varphi}\cos\theta_0}{2r_H^2\sin^2\theta_0}, \quad (\Psi=P_1) \qquad (8.4.30) \\ C_1 &= -\frac{g}{2\cos\theta_0}-\frac{r_{H,\varphi}\cos\theta_0}{2r_H^2\sin^2\theta_0}, \qquad (\Psi=P_2) \qquad (8.4.31) \end{aligned}$$

中可以看到在变加速直线运动Kinnersley黑洞情形($b=c=0$, $r_{H,\varphi}=0$)，对于$\Psi=P_1,P_2$和Φ, $C_1=0$. 如果只考虑方程(8.4.30) 中的最后两项，那么对于Dirac粒子不同的自旋态$s=\pm1/2$, 可把与“自旋相关” 的项重新写作

$$\begin{aligned} \omega_s &\sim s\Big(\frac{r_{H,\varphi}\cos\theta_0}{r_H^2\sin^2\theta_0}+\frac{g}{\cos\theta_0}\Big), \qquad (8.4.32) \\ &\quad (s=1/2,-1/2\,,\ \Psi=P_1\,,P_2\,;\quad s=0\,,\ \Psi=\Phi). \end{aligned}$$

此处我们对这一项特别感兴趣的原因是它明显与电子处于不同手征态的自旋有关. 因子$r_{H,\varphi}$描述黑洞在演化过程中黑洞的角向形变，$r_{H,\varphi}/(r_H^2\sin^2\theta_0)$可视为“形变”角动量，这一项也出现在$\Omega$的表达式之中. 从$\omega_s$和$\Omega$的表达式来看，似乎可以把$g$类比为因角向加速而产生的角动量. 因此，我们认为$\omega_s$ 这一项代表自旋-加速耦合效应，这个效应可阐释为粒子的自旋与黑洞的角向加速之间的相互作用.

在这一节中我们研究了任意加速Kinnersley黑洞的Hawking辐射，用不同的方法导出了事件视界面方程，并求出了Hawking温度，表明该黑洞的视界不是球对称的. 我们发现在Dirac粒子的热辐射Fermi-Dirac谱中有一项额外的由C_1项代表的效应，这个效应来自Dirac粒子的自旋与黑洞的角向加速之间的相互作用，它不出现在标量粒子的Bose-Einstein统计分布之中. 另外我们看到当$b=c=0$, $r_{H,\varphi}=0$时，$C_1=0$. 这意味着变加速直线运动的Kinnersley 黑洞没有此项效应出现，这与上一节的结论是一致的. 这种自旋-加速耦合效应的特征是它明显依赖于

粒子不同的自旋态, 我们认为它可能起源于粒子的自旋与蒸发黑洞的加速之间的耦合作用.

当$g=0$时, 本节的讨论回到上节讨论的变加速直线运动Kinmersley黑洞情形; 当$\mu_0=0$时, 即化为对Weyl中微子Hawking辐射的分析. 当$f=g=0$时, 可回到Vaidya-型黑洞情形. 另外, 这里的讨论可直接推广到更一般的带电荷$Q(v)$、带磁荷$P(v)$和宇宙常数Λ的变加速Kinnersley黑洞情形($2G=1-2M(v)/r+(Q^2+P^2)(1-4ra\cos\theta)/r^2-2ra\cos\theta-r^2(f^2+g^2\sin^2\theta)-\Lambda r^2/3$).

§8.5 任意加速Kinnersley黑洞的Hawking效应 — Weyl中微子

这一节采用与上节不同的零标架重新研究变加速运动Kinnersley黑洞的量子热效应. 因为Hawking辐射与粒子质量无关, 所以为简便起见, 我们只研究Weyl中微子情形.

Kinnersley "光子火箭"度规可以改写为

$$ds^2=2dv(Fdv-dr)-r^2\left[(d\theta+fdv)^2+\sin^2\theta(d\varphi+gdv)^2\right], \tag{8.5.1}$$

其中$2F=1-2M(v)/r-2ar\cos\theta$, f和g的表达式与上节相同. 黑洞质量M 为超前时间v的函数.

现在选取复的零标架系$\{\mathbf{l},\mathbf{n},\mathbf{m},\overline{\mathbf{m}}\}$使其满足伪正交条件$\mathbf{l}\cdot\mathbf{n}=-\mathbf{m}\cdot\overline{\mathbf{m}}=1$, 其1-形式基为

$$\begin{aligned}\mathbf{l}&=dv, \qquad\qquad \mathbf{n}=Fdv-dr,\\ \mathbf{m}&=\frac{-r}{\sqrt{2}}\left[(f+ig\sin\theta)dv+d\theta+i\sin\theta d\varphi\right],\\ \overline{\mathbf{m}}&=\frac{-r}{\sqrt{2}}\left[(f-ig\sin\theta)dv+d\theta-i\sin\theta d\varphi\right],\end{aligned} \tag{8.5.2}$$

相应的方向导数为

$$\begin{aligned}&D=-\partial_r, \qquad\qquad \Delta=\partial_v+F\partial_r-f\partial_\theta-g\partial_\varphi,\\ &\delta=\frac{1}{\sqrt{2}r}\left(\partial_\theta+\frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi\right), \quad \overline{\delta}=\frac{1}{\sqrt{2}r}\left(\partial_\theta-\frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi\right).\end{aligned} \tag{8.5.3}$$

博士学位论文
DOCTORAL DISSERTATION

求得该零标架中非零的复NP旋系数为: [记$F_{,r} = dF/dr$等等]

$$\rho = \frac{1}{r}, \quad \mu = \frac{F}{r} - f_{,\theta}, \quad \gamma = \frac{1}{2}\Big(-F_{,r} + \frac{ig}{\cos\theta}\Big),$$
$$\beta = -\alpha = \frac{\cot\theta}{2\sqrt{2}r}, \quad \nu = \frac{F_{,\theta}}{\sqrt{2}r} = \frac{a\sin\theta}{\sqrt{2}}. \tag{8.5.4}$$

对于属于Petrov D-型的Kinnersley黑洞, $\kappa = \lambda = \sigma = \epsilon = \tau = \pi = 0$和$\psi_3 = 0$, 但$\nu \neq 0$, 可以仿照Teukolsky的微扰论, 从Weyl方程

$$(D + \epsilon - \rho)\eta_1 - (\bar{\delta} + \pi - \alpha)\eta_0 = 0,$$
$$(\delta + \beta - \tau)\eta_1 - (\Delta + \mu - \gamma)\eta_0 = 0. \tag{8.5.5}$$

可推导出相应的微扰二阶方程

$$\big[(D + \epsilon^* - \rho - \rho^*)(\Delta + \mu - \gamma) - (\delta - \alpha^* - \tau + \pi^*)(\bar{\delta} + \pi - \alpha)\big]\eta_0 = 0,$$
$$\big[(\Delta - \gamma^* + \mu + \mu^*)(D + \epsilon - \rho) - (\bar{\delta} + \beta^* + \pi - \tau^*)(\delta + \beta - \tau)\big]\eta_1$$
$$= \big[\nu D + (D + 2\epsilon + \epsilon^* - \rho^*)\nu - \psi_3\big]\eta_0. \tag{8.5.6}$$

把一阶方程(8.5.5)和二阶方程(8.5.6)在上述零标架系中具体写出来就是

$$(\partial_r + \frac{1}{r})\chi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}r}\mathcal{L}_{1/2}\eta_0 = 0,$$
$$(\mathcal{G} - f_{,\theta} - \frac{ig}{2\cos\theta})\eta_0 - \frac{1}{\sqrt{2}r}\mathcal{L}^\dagger_{1/2}\eta_1 = 0 \tag{8.5.7}$$

和

$$\big[2r^2(\partial_r + 2/r)(\mathcal{G} - f_{,\theta} - \frac{ig}{2\cos\theta}) + \mathcal{L}^\dagger_{1/2}\mathcal{L}_{1/2}\big]\eta_0 = 0,$$
$$\big[2r^2(\mathcal{G} + F/r - 2f_{,\theta} + \frac{ig}{2\cos\theta})(\partial_r + 1/r) + \mathcal{L}_{1/2}\mathcal{L}^\dagger_{1/2}\big]\eta_1$$
$$= \sqrt{2}r^2 a\sin\theta(\partial_r + 1/r)\eta_0, \tag{8.5.8}$$

其中$\mathcal{L}_n$和$\mathcal{L}^\dagger_n$的定义如前, 另外我们定义了算符

$$\mathcal{G} = \partial_v + F\partial_r - f\partial_\theta - g\partial_\varphi + F/r + F_{,r}/2.$$

作代换$\chi_1 = \sqrt{2}r\eta_1$, $\chi_0 = \eta_0$后, 方程(8.5.7) 和(8.5.8)成为

$$\partial_r\chi_1 + \mathcal{L}_{1/2}\chi_0 = 0,$$
$$2r^2(\mathcal{G} - f_{,\theta} - \frac{ig}{2\cos\theta})\chi_0 - \mathcal{L}^\dagger_{1/2}\chi_1 = 0 \tag{8.5.9}$$

和

$$
\begin{aligned}
&[2r^2(\partial_r + 2/r)(\mathcal{G} - f_{,\theta} - \frac{ig}{2\cos\theta}) + \mathcal{L}_{1/2}^\dagger \mathcal{L}_{1/2}]\chi_0 = 0\,, \\
&[2r^2(\mathcal{G} - 2f_{,\theta} + \frac{ig}{2\cos\theta})\partial_r + \mathcal{L}_{1/2}\mathcal{L}_{1/2}^\dagger]\chi_1 \\
&\quad = 2r^3 a\sin\theta(\partial_r + 1/r)\chi_0\,.
\end{aligned} \tag{8.5.10}
$$

采用在上一节中引入的GTCT(8.4.5), 一阶方程(8.5.9)在视界附近化为

$$
\begin{aligned}
\big(r_{H,\theta} + \frac{i}{\sin\theta_0} r_{H,\varphi}\big)\frac{\partial}{\partial r_*}\chi_1 + 2r_H^2\big(F - r_{H,v} + f r_{H,\theta} + g r_{H,\varphi}\big)\frac{\partial}{\partial r_*}\chi_0 = 0\,, \\
-\frac{\partial}{\partial r_*}\chi_1 + \big(r_{H,\theta} - \frac{i}{\sin\theta_0} r_{H,\varphi}\big)\frac{\partial}{\partial r_*}\chi_0 = 0\,.
\end{aligned} \tag{8.5.11}
$$

基于前节中同样的理由, 由方程(8.5.11)的行列式为零可得到

$$
2(F - r_{H,v} + f r_{H,\theta} + 2g r_{H,\varphi}) + \frac{r_{H,\theta}^2}{r_H^2} + \frac{r_{H,\varphi}^2}{r_H^2\sin^2\theta_0} = 0\,. \tag{8.5.12}
$$

不难看出方程(8.5.12)正是前一节中的视界面方程(8.4.6).

将二阶方程(8.5.10)展开, 写成明显形式为

$$
\begin{aligned}
&\Big\{2r^2\big[\partial_{vr}^2 + F\partial_r^2 - f\partial_{r\theta}^2 - g\partial_{r\varphi}^2\big] + (3r^2F_{,r} + 6rF - 2r^2 f_{,\theta} - r^2\frac{ig}{\cos\theta})\partial_r \\
&+4r(\partial_v - f\partial_\theta - g\partial_\varphi) + \partial_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 + \cot\theta\partial_\theta + \frac{i\cos\theta}{\sin^2\theta}\partial_\varphi \\
&-\frac{1}{4\sin^2\theta} - \frac{1}{4} + r^2F_{,rr} + 4rF_{,r} + 2F - 4rf_{,\theta} - 2r\frac{ig}{\cos\theta})\Big\}\chi_0 = 0
\end{aligned} \tag{8.5.13}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&\Big\{2r^2\big[\partial_{vr}^2 + F\partial_r^2 - f\partial_{r\theta}^2 - g\partial_{r\varphi}^2\big] + (r^2F_{,r} + 2rF - 4r^2 f_{,\theta} + 2r^2\frac{ig}{\cos\theta})\partial_r \\
&+\partial_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 + \cot\theta\partial_\theta - \frac{i\cos\theta}{\sin^2\theta}\partial_\varphi - \frac{1}{4\sin^2\theta} - \frac{1}{4}\Big\}\chi_1 \\
&= 2r^3 a\sin\theta(\partial_r + 1/r)\chi_0\,.
\end{aligned} \tag{8.5.14}
$$

另外, 质量为μ_0的标量场方程: $(\Box + \mu_0^2)\Phi = 0$在Kinnersley时空中具体为

$$
\begin{aligned}
&\Big\{2r^2\big[\partial_{vr}^2 + F\partial_r^2 - f\partial_{r\theta}^2 - g\partial_{r\varphi}^2\big] + (2r^2F_{,r} + 4rF - 2r^2 f_{,\theta})\partial_r \\
&+2r(\partial_v - f\partial_\theta - g\partial_\varphi) + \partial_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 + \cot\theta\partial_\theta - \mu_0^2 r^2\Big\}\Phi = 0\,.
\end{aligned} \tag{8.5.15}
$$

对二阶方程(8.5.13-8.5.15)作GTCT处理得到它们的渐近形式为

博士学位论文
DOCTORAL DISSERTATION

$$\tilde{\mathcal{K}}\chi_0 + \Big[-\widetilde{A} + \frac{3F}{r_H} + \frac{3F_{,r}}{2} - f_{,\theta} - \frac{ig}{2\cos\theta_0} - \frac{i\cos\theta_0}{2r_H^2\sin^2\theta_0}r_{H,\varphi} - \frac{\cot\theta_0}{2r_H^2}r_{H,\theta} + \frac{2}{r_H}(fr_{H,\theta} + gr_{H,\varphi} - r_{H,v}) - \Big(\frac{r_{H,\theta\theta}}{2r_H^2} + \frac{r_{H,\varphi\varphi}}{2r_H^2\sin^2\theta_0}\Big)\Big]\frac{\partial}{\partial r_*}\chi_0 = 0 \quad (8.5.16)$$

和

$$\tilde{\mathcal{K}}\chi_1 + \Big[-\widetilde{A} + \frac{F}{r_H} + \frac{F_{,r}}{2} - 2f_{,\theta} + \frac{ig}{2\cos\theta_0} + \frac{i\cos\theta_0}{2r_H^2\sin^2\theta_0}r_{H,\varphi} - \frac{\cot\theta_0}{2r_H^2}r_{H,\theta} - \Big(\frac{r_{H,\theta\theta}}{2r_H^2} + \frac{r_{H,\varphi\varphi}}{2r_H^2\sin^2\theta_0}\Big)\Big]\frac{\partial}{\partial r_*}\chi_1 = r_H a\sin\theta_0\frac{\partial}{\partial r_*}\chi_0\,, \quad (8.5.17)$$

以及

$$\tilde{\mathcal{K}}\Phi + \Big[-\widetilde{A} + \frac{2F}{r_H} + F_{,r} - f_{,\theta} + \frac{1}{r_H}(fr_{H,\theta} + gr_{H,\varphi} - r_{H,v}) - \frac{\cot\theta_0}{2r_H^2}r_{H,\theta} - \Big(\frac{r_{H,\theta\theta}}{2r_H^2} + \frac{r_{H,\varphi\varphi}}{2r_H^2\sin^2\theta_0}\Big)\Big]\frac{\partial}{\partial r_*}\Phi = 0\,. \quad (8.5.18)$$

此处算符$\tilde{\mathcal{K}}$代表二阶导数

$$\tilde{\mathcal{K}} = \Big[\frac{\widetilde{A}}{2\kappa} + 2F - r_{H,v} + fr_{H,\theta} + gr_{H,\varphi}\Big]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*} - \Big(f + \frac{r_{H,\theta}}{r_H^2}\Big)\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*} - \Big(g + \frac{r_{H,\varphi}}{r_H^2\sin^2\theta_0}\Big)\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi_*}\,,$$

其中的系数$\widetilde{A}$为不定式

$$\widetilde{A} = \lim_{\substack{r\to r_H, v\to v_0\\ \theta\to\theta_0,\varphi\to\varphi_0}} \frac{F - r_{H,v} + fr_{H,\theta} + gr_{H,\varphi} + r_{H,\theta}^2/(2r^2) + r_{H,\varphi}^2/(2r^2\sin^2\theta)}{r - r_H} = F_{,r} - \Big(\frac{r_{H,\theta}^2}{r_H^3} + \frac{r_{H,\varphi}^2}{r_H^3\sin^2\theta_0}\Big)\,. \quad (8.5.19)$$

注意这里的$\tilde{\mathcal{K}}$和$\widetilde{A}$与上节中的$\mathcal{K}$ 和A相差一个乘子$2r_H^2$. 令二阶导数项$\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}$前的系数等于1/2, 亦即

$$\frac{\widetilde{A}}{2\kappa} + 2F - r_{H,v} + fr_{H,\theta} + gr_{H,\varphi} \equiv \frac{1}{2}\,,$$

可得到待定的可调节的温度参数κ的表达式为

$$\kappa = \frac{r_H^2F_{,r} - r_H^{-1}(r_{H,\theta}^2 + r_{H,\varphi}^2/\sin^2\theta_0)}{r_H^2(1-2F) + (r_{H,\theta}^2 + r_{H,\varphi}^2/\sin^2\theta_0)}\,. \quad (8.5.20)$$

于是可以化二阶方程(8.5.16-8.5.18)为标准形式的波方程

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+2\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}-2C_3\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}-2\Omega\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi_*}+2(C_2+iC_1)\frac{\partial}{\partial r_*}\Big]\Psi=0\,,\qquad(8.5.21)$$

式中

$$\Omega=g+\frac{r_{H,\varphi}}{r_H^2\sin^2\theta_0}\,,\qquad C_3=f+\frac{r_{H,\theta}}{r_H^2}\,.$$

对于$\Psi=\chi_0$

$$\begin{aligned}C_2+iC_1=&\frac{F}{r_H}+\frac{F_{,r}}{2}-f_{,\theta}-\frac{ig}{2\cos\theta_0}-\frac{i\cos\theta_0}{2r_H^2\sin^2\theta_0}r_{H,\varphi}\\&-\frac{\cot\theta_0}{2r_H^2}r_{H,\theta}-\frac{1}{2r_H^2}\big(r_{H,\theta\theta}+\frac{r_{H,\varphi\varphi}}{\sin^2\theta_0}\big)\,;\end{aligned}$$

对于$\Psi=\chi_1$,

$$\begin{aligned}2(C_2+iC_1)=&\frac{F}{r_H}-\frac{F_{,r}}{2}-2f_{,\theta}+\frac{ig}{\cos\theta_0}+\frac{i\cos\theta_0}{2r_H^2\sin^2\theta_0}r_{H,\varphi}\\&-\frac{\cot\theta_0}{2r_H^2}r_{H,\theta}-\frac{1}{2r_H^2}\big(r_{H,\theta\theta}+\frac{r_{H,\varphi\varphi}}{\sin^2\theta_0}\big)\\&+\frac{1}{r_H^3}\big(r_{H,\theta}^2+\frac{r_{H,\varphi}^2}{\sin^2\theta_0}\big)-ar_H\sin\theta_0\big(r_{H,\theta}-\frac{ir_{H,\varphi}}{\sin\theta_0}\big)^{-1}\,;\end{aligned}$$

对于$\Psi=\Phi$, $C_1=0$,

$$C_2=\frac{F}{r_H}-f_{,\theta}-\frac{r_{H,\theta}}{2r_H^2}\cot\theta_0-\frac{1}{2r_H^2}\big(r_{H,\theta\theta}+\frac{r_{H,\varphi\varphi}}{\sin^2\theta_0}\big)+\frac{1}{2r_H^3}\big(r_{H,\theta}^2+\frac{r_{H,\varphi}^2}{\sin^2\theta_0}\big)\,.$$

仿照前节的处理, 由视界附近的标准波方程用Damour-Ruffini-Sannan方案导出粒子的热辐射谱为

$$\langle\mathcal{N}(\omega)\rangle\simeq\frac{1}{e^{(\omega+m\Omega-C_1)/T_H}\pm1}\,,\qquad(8.5.22)$$

其中Hawking温度$T_H=\kappa/(2\pi)$, 而系数C_1对于$\Psi=\Phi$, $C_1=0$; 对于$\Psi=\chi_0,\chi_1$则为

$$\begin{aligned}C_1&=-\frac{g}{2\cos\theta_0}-\frac{r_{H,\varphi}\cos\theta_0}{2r_H^2\sin^2\theta_0}\,,\qquad(\Psi=\chi_0)\\C_1&=\frac{g}{2\cos\theta_0}+\frac{r_{H,\varphi}\cos\theta_0}{2r_H^2\sin^2\theta_0}\\&\quad-ar_Hr_{H,\varphi}\big(r_{H,\theta}^2+\frac{r_{H,\varphi}^2}{\sin^2\theta_0}\big)^{-1}\,,\quad(\Psi=\chi_1)\qquad(8.5.23)\end{aligned}$$

博士学位论文
DOCTORAL DISSERTATION

方程(8.5.23)中右边最后一项与旋系数$\nu(r_H)$成正比，如果忽略这一项，则与“自旋相关”的项可写为

$$\omega_s \simeq s\Big(\frac{r_{H,\varphi}\cos\theta_0}{r_H^2\sin^2\theta_0}+\frac{g}{\cos\theta_0}\Big)\,, \qquad (8.5.24)$$
$$(s=-1/2,1/2\,,\ \Psi=\chi_0\,,\chi_1\,;\quad s=0\,,\ \Psi=\Phi)$$

(8.5.24)式与上节中的(8.4.32)式完全相同，反映了变加速Kinnersley 黑洞有自旋-加速耦合效应存在.

在本节中我们采用了不同的零标架研究了Kinnersley黑洞的量子热效应. 两个零标架的不同在于它们仅相差一个零标架的I-类Lorentz转动，而导出的物理结果(视界面方程和Hawking温度以及热谱)基本相同. 虽然系数C_1和C_2的表达式在这两节中稍有不同，但它们有相同的结构. 特别是对于$s=-1/2$分量，C_1完全相同. 虽然现在还不太清楚在$s=1/2$分量中系数C_1和C_2在不同零标架中有所不同的具体原因，但有一点却是显然的，即在C_1和C_2中有与旋系数ν成正比的项. 我们猜测这一差别可能与在零标架的I-类Lorentz转动下，旋量波函数的$s=1/2$分量要作相应的移动有关.

在处理上，本节采用的零标架似乎比上节采用的零标架要明快，而且系数C_1和C_2 的表达式也简单一些. 虽然结果有所差异，但都定性反映了任意加速的Kinnersley黑洞存在有自旋-加速耦合效应. 因此，本节再次证明了采用不同的零标架去讨论Hawking辐射应得到相同的结果，这映证了一个普遍原理— 物理结果不应依赖于具体坐标系的选择. 这可以看作是广义协变原理在黑洞Hawking辐射理论研究中的一个具体体现.

§8.6 小结

在这一章中，我们研究了Kinnersley黑洞的Hawking辐射，表明广义乌龟坐标变换法(GTCT)能够比较满意地处理任意自旋粒子在这类黑洞中的蒸发. 尽管场方程不能事先退耦，只要同时考虑一阶方程和二阶方程，最终还是可以将二阶场方程在视界附近化成单一分量的标准波方程. 这说明GTCT理论不要求事先对一阶方程分离变量，因而能够用于更一般黑洞时空量子热性质的讨论[333–335]. 我们认为这一工具也有希望应用于讨论任意黑洞的非热辐射性质[336–339].

这一章的研究表明，任意加速的Kinnersley黑洞有新的自旋-加速耦合效应出现，而对于作直线加速运动的Kinnersley黑洞则没有此项效应. 这个效应也不出现

在标量粒子的热辐射谱中.

最后, 我们采用了不同的零标架重新研究了此类黑洞的Hawking效应, 两个零标架不同仅在于它们相差一个I-类Lorentz转动, 但后一种零标架的选取似乎更方便于计算, 而且结果也较简洁. 虽然有这些差别, 但是我们能够发现, 两种计算一致地给出相同的视界面方程、Hawking温度以及热辐射谱. 因此物理结果不依赖于零标架的具体选取.

作任意加速运动的Kinnersley黑洞按Petrov分类属于D-型时空, 与属于Petrov II-型的动态Kerr-Newman黑洞一样, 在一定的零标架系中旋系数$\kappa = \lambda = \sigma = 0$, 但$\nu \neq 0$. 对于这两类时空, 可仿照Teukolsky黑洞微扰论, 推导出旋量场的二阶微扰方程, 就会发现在$s = 1/2$分量满足二阶方程中有一项与ν成正比的一阶导数交叉项. 在完成GTCT处理后, 只有利用一阶导数之间的关系式才能换掉这一项, 使该分量的二阶方程化成单一分量的波方程.

对于作转动和加速运动的Kinnerlsey-Kerr黑洞[31], 虽然该类时空的性质尚还不太清楚, 但我们预期完全可以应用经本文发展的GTCT方法(DRS-ZWC)去研究该类时空的量子热效应, 在高自旋粒子的Hawking热辐射谱中应该出现自旋-转动-加速耦合效应, 而且这将是一个非常复杂的混合效应.



第九章　动态黑洞的量子热效应 — 总结

"All laws in physics take the same form in any coordinate system".

自Hawking发现黑洞并不是完全黑的而是可以从其视界发射辐射以来，已经过去四分之一多个世纪了. Hawking的这一划时代的发现在黑洞物理学中立下了一个重要的里程碑. 黑洞物理学的一个重要课题就是要揭示各种黑洞的热性质. 在过去的二、三十年中，对各种稳态轴对称黑洞中标量场和Dirac粒子的热辐射的研究获得了长足的进步. 然而多数研究主要是集中在研究静态和稳态黑洞的热性质上. 因为天体物理学中一个真实的黑洞可以向外辐射或吸收周围的物质，因而是非稳态的、随时间而演化的. 因此考察动态黑洞的热性质比研究稳(静) 态黑洞更有意义，值得作深入的研究. 决定动力学黑洞事件视界的位置和温度的一个熟知的方法是计算重整化能动张量的真空期望值. 但是这个方法非常复杂，用途也有限(目前只能应用于球对称情形)，只能给出视界位置和温度的近似值，在其它场合下则困难重重.

为了研究动态黑洞的Hawking蒸发，赵峥等人在Damour-Ruffini-Sannan工作的基础上提出了一个新方法，称为广义乌龟坐标变换法(GTCT). 这个方法能同时给出动态黑洞事件视界位置和表面温度的准确值. 其基本思想是把稳(静)态时空情形下的普通乌龟坐标变换$r_* = r + (2\kappa)^{-1}\ln(r - r_H)$(其中$\kappa$为事件视界的表面引力)推广为动态情形下的类似形式，但允许事件视界位置r_H可以是超前时间$v = t + r_*$和/或角度θ, φ的函数，然后把标量场方程或Dirac方程在所研究的黑洞时空事件视界附近化成波动方程的标准形式. 例如，在Schwarzschild黑洞情形下，事件视界位置为一个常数($r_H = 2M$)，而在Vaidya-型时空，它为超前时间的函数($r_H = r_H(v)$). 这个方法已被成功地应用于研究各种类型动态黑洞中标量场的量子热效应以及球对称非静态黑洞中Dirac粒子的Hawking辐射.

但是在我们的工作出现以前，动态Kerr(-Newman)黑洞和Kinnersley黑洞中Dirac粒子的Hawking蒸发尚没有得到较好的解决. 这两个课题首先由我们用赵峥建议的GTCT 方法给出了满意的处理. 以前人们认为研究这两类黑洞中Dirac粒子的量子热效应的主要困难在于一般时空中Dirac方程不能完全分离



变量. 现在我们的研究表明不需要对一阶Dirac方程事先进行退耦处理, 在完成GTCT处理后只需根据时空的对称性一次给出合理的分离变量即可.

对动态黑洞中Dirac粒子的Hawking效应进行讨论的关键在于如何将每个旋量分量满足的二阶方程在视界附近化成单一分量的波动方程. 在上述两类时空中(旋系数$\nu \neq 0$), 因为$s = 1/2$分量满足的二阶方程中有一项与ν成正比的$s = -1/2$分量的一阶导数交叉项. 在作GTCT处理后这一项只有利用由一阶方程导出的关系式才能换掉, 因此必需同时考虑一阶方程和二阶方程在视界附近的渐近形式. 对前者作GTCT处理后, 一方面可得到视界面方程, 另一方面提供一阶导数之间的关系式; 对后者作完全类似的处理后, 通过调节待定的κ参数, 一方面可得到表面引力的表达式, 另一方面是为了化二阶方程为标准形式的波方程. 显然, 这一方法完全可以推广到高自旋粒子情形.

现将我们的工作总结如下:

- 首先, 我们探讨了动态Kerr(-Newman)黑洞中Dirac粒子以及光子的Hawking辐射, 发现这类黑洞有自旋-转动耦合效应出现. 该效应与粒子的自旋态有关, 与粒子的质量则没有关系. 稳态Kerr黑洞和Vaidya-型黑洞不存在这类效应. 标量粒子的热谱中不出现此类效应[270–274].

- 其次, 我们用上述推广的GTCT方法重新考察了Vaidya-型球对称黑洞的Hawking 蒸发, 发现对于高自旋粒子($s = 1/2$电子, $s = 1$光子)来说, 不是所有分量都参与Hawking辐射, 即Hawking辐射对不同分量是不对称的. 我们还严格证明了此类黑洞中质量不为零的Dirac粒子的热谱中没有与质量有关的量子能层效应出现[275–278].

- 再次, 采用经过我们进一步发展了的GTCT方法讨论了Kinnersley黑洞的量子热效应. 我们发现作任意加速运动的Kinnersley黑洞有自旋-加速耦合效应出现[283], 而作变加速直线运动的黑洞则没有此项效应[279–282].

- 另外, 我们选取了不同的零标架重新研究了动态Kerr(-Newman)黑洞和作任意加速运动的Kinnersley黑洞的Hawking蒸发. 只要我们采用相同形式的GTCT, 就会得到完全相同的视界方程、Hawking温度以及热辐射谱. 这三个要素不因标架的具体选取而不同, 表明物理结果独立于坐标系的选择.

GTCT理论源于Damour-Ruffini和Sannan的工作, 其重要发展来自于赵峥教授提出了动态情形下的乌龟坐标变换形式. 我们的系列工作则进一步发展并

完善了这一方法，使之成为一套完备的理论体系，是处理Hawking辐射行之有效的工具. 可以预料到这一理论(DRS-ZWC)能够很好地解决转动带电和任意加速的Kinnersley-Kerr黑洞[31] 中Dirac粒子的Hawking效应，我们预期在自旋粒子的热辐射谱中会有自旋-转动-加速耦合效应出现.

不过，这一方法在国际上尚未被普遍认可，流行的计算重整化能动张量方法仍然在黑洞Hawking辐射研究中占主导地位. 寻找新的研究动态黑洞Hawking效应的方法或将这两种理论相互调合是今后值得探讨的一个问题.

基于已完成的和部分未完成的工作，现提出如下与本文相关的今后科研工作的初步设想:

课题A: 黑洞熵起源与黑洞热力学

黑洞熵的起源是当前黑洞物理学研究的一个热点问题. 对于黑洞熵和热力学第三定律，当前存在几种不同的观点，争议很大，没有公认的看法. 存在着几种不同的黑洞熵的概念和定义，对黑洞热力学第三定律也有不同的解释. 我个人认为对这两个问题进行深入的理解是非常诱人而且是很紧迫的. 用一个全新的方法去理解黑洞热力学可能会显剧地改变我们的看法. 超弦低能唯象D-brane理论是其中一种可能的方案.

课题B: 动态黑洞的量子热效应

动态黑洞有着新的不同于稳态黑洞的量子效应，如自旋-转动(-加速形变)耦合效应. 当前研究动态黑洞Hawking辐射的一个有效工具是广义乌龟坐标变换法，目前它在国际上尚未被普遍认可. 寻找一种新的方法去研究动态黑洞的Hawking效应是一个值得探索的问题.

课题C: 黑洞微扰与准正则模

黑洞演化晚期存在幂律尾(power-law tail)现象，黑洞的准正则模(quasi-normal mode) 可能是黑洞存在的一种间接证据，是证实黑洞存在的一种“指纹”. 对微扰波动方程求精确解，并构造Green函数是解析方法中的一个重要环节，在此基础上再作数值模拟，将是非常令人信服的.

课题D: 场方程精确解与积分方程

此外根据第二章的研究，还可以把黑洞背景上的波方程的精确解的研究与下述问题关联起来: 构造积分方程和(热)Green函数，研究标量场的路径积分、相

干态、热力学性质(熵)、有限温度场论、量子统计(Bose-Einstein凝聚)、黑洞相变、束缚态、标量场的二次量子化、黑洞的量子化、黑洞面积和熵的量子化等等.

而黑洞蒸发的结局和大爆炸起点显然与奇性问题有关. 现有的量子场论和广义相对论在Planck尺度上完全失效, 因此不能解决这个问题. Planck尺度上的物理必然与时空的量子结构— 自旋泡沫(spin foam)有关. 当黑洞的半径与其Compton波长相比拟时, 它是宇宙中最小的黑洞, 又是最大的"基本粒子" — Planck子. 我们不妨称这样的基元黑洞为黑洞子(blaholon), 它是黑洞拟或宇宙的基本构成元素吗? 或者, 它是由弦或膜(brane)构成的吗?

超弦理论能解决这些令人迷惑的问题吗?

黑洞蒸发的终点必然将我们引向一个Planck时代— 宇宙的起源和终结.

附录A 黑洞热力学第一定律表达式的代数推导

对等式$\mathcal{A}_\pm = r_\pm^2 + a^2 = 2Mr_\pm - Q^2$进行微分, 可以导出关系式

$$r_\pm dM = \pm\varepsilon dr_\pm + ada + QdQ\,, \tag{A.1}$$

然后用$r_\pm$乘以此式并加上一项a^2dM, 就得到关系式

$$\mathcal{A}_\pm dM = \pm(\varepsilon/2)d\mathcal{A}_\pm + adJ + Qr_\pm dQ\,, \tag{A.2}$$

用$\mathcal{A}_\pm$除以上式就得到方程(4.3.13).

从关系式$r_\mp(\mathcal{A}_\pm + Q^2) = 2Mr_+r_- = 2M(a^2 + Q^2) = 2Ja + 2MQ^2$, 能够推出

$$(M \mp \varepsilon)\mathcal{A}_\pm = 2Ja + (2M - r_\mp)Q^2 = 2Ja + Q^2 r_\pm\,, \tag{A.3}$$

用$\mathcal{A}_\pm$除以此式, 并将$\pm\varepsilon = \kappa_\pm\mathcal{A}_\pm$ 移项就得到方程(4.3.14).

从恒等式

$$A = \frac{\omega - \omega_+}{2\kappa_+} - \frac{\omega - \omega_-}{2\kappa_-}, \quad B = \frac{\omega - \omega_+}{2\kappa_+} + \frac{\omega - \omega_-}{2\kappa_-},$$

可以得到关系式

$$W_\pm = \frac{B \pm A}{2} = \frac{\omega - \omega_\pm}{2\kappa_\pm}. \tag{A.4}$$

用$2\kappa_\pm$乘以此式, 并将$\omega_\pm = m\Omega_\pm + e\Phi_\pm$移项就得到方程(4.3.15). 然后对此方程进行微分, 就可以得到方程(4.3.16).

附录B　广义乌龟坐标变换

对于最一般的黑洞时空，我们定义推广的乌龟坐标$[v, r, \theta, \varphi]$:

$$\begin{aligned} r_* &= r + \frac{1}{2\kappa(v_0,\theta_0,\varphi_0)}\ln\left[r - r_H(v,\theta,\varphi)\right], \\ v_* &= v - v_0\,, \quad \theta_* = \theta - \theta_0\,, \quad \varphi_* = \varphi - \varphi_0\,, \end{aligned} \tag{B.1}$$

即

$$\begin{aligned} dr_* &= \left[1 + \frac{1}{2\kappa(r-r_H)}\right]dr - \frac{r_{H,v}}{2\kappa(r-r_H)}dv \\ &\quad - \frac{r_{H,\theta}}{2\kappa(r-r_H)}d\theta - \frac{r_{H,\varphi}}{2\kappa(r-r_H)}d\varphi\,, \\ dv_* &= dv\,, \qquad d\theta_* = d\theta\,, \qquad d\varphi_* = d\varphi\,, \end{aligned} \tag{B.2}$$

式中$r_H = r_H(v,\theta,\varphi)$为事件视界的位置，$v_0$，$\theta_0$和$\varphi_0$为任意固定的参数，$\kappa = \kappa(v_0,\theta_0,\varphi_0)$为待定的温度参数，它们在乌龟坐标变换下都不变．在$v = v_0$时刻，$\theta = \theta_0$和$\varphi = \varphi_0$方向，视界位于$r_H = r_H(v_0,\theta_0,\varphi_0)$处．由上式可得一阶导数之间的变换关系式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \left[1 + \frac{1}{2\kappa(r-r_H)}\right]\frac{\partial}{\partial r_*}\,, \qquad \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v_*} - \frac{r_{H,v}}{2\kappa(r-r_H)}\frac{\partial}{\partial r_*}\,, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta_*} - \frac{r_{H,\theta}}{2\kappa(r-r_H)}\frac{\partial}{\partial r_*}\,, \qquad \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi_*} - \frac{r_{H,\varphi}}{2\kappa(r-r_H)}\frac{\partial}{\partial r_*} \end{aligned} \tag{B.3}$$

和二阶导数之间的变换关系式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} &= \left[1 + \frac{1}{2\kappa(r-r_H)}\right]^2\frac{\partial^2}{\partial {r_*}^2} - \frac{1}{2\kappa(r-r_H)^2}\frac{\partial}{\partial r_*}\,, \\ \frac{\partial^2}{\partial v^2} &= \frac{\partial^2}{\partial {v_*}^2} - \frac{2r_{H,v}}{2\kappa(r-r_H)}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*} + \frac{r_{H,v}^2}{[2\kappa(r-r_H)]^2}\frac{\partial^2}{\partial {r_*}^2} \\ &\quad - \frac{r_{H,v}^2 + r_{H,vv}(r-r_H)}{2\kappa(r-r_H)^2}\frac{\partial}{\partial r_*}\,, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2}{\partial{\theta_*}^2} - \frac{2r_{H,\theta}}{2\kappa(r-r_H)}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*} + \frac{r_{H,\theta}^2}{[2\kappa(r-r_H)]^2}\frac{\partial^2}{\partial {r_*}^2} - \frac{r_{H,\theta}^2 + r_{H,\theta\theta}(r-r_H)}{2\kappa(r-r_H)^2}\frac{\partial}{\partial r_*},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} = \frac{\partial^2}{\partial{\varphi_*}^2} - \frac{2r_{H,\varphi}}{2\kappa(r-r_H)}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi_*} + \frac{r_{H,\varphi}^2}{[2\kappa(r-r_H)]^2}\frac{\partial^2}{\partial {r_*}^2} - \frac{r_{H,\varphi}^2 + r_{H,\varphi\varphi}(r-r_H)}{2\kappa(r-r_H)^2}\frac{\partial}{\partial r_*},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial v} = [1+\frac{1}{2\kappa(r-r_H)}]\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*} - \frac{r_{H,v}[1+2\kappa(r-r_H)]}{[2\kappa(r-r_H)]^2}\frac{\partial^2}{\partial {r_*}^2} + \frac{r_{H,v}}{2\kappa(r-r_H)^2}\frac{\partial}{\partial r_*},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} = [1+\frac{1}{2\kappa(r-r_H)}]\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*} - \frac{r_{H,\theta}[1+2\kappa(r-r_H)]}{[2\kappa(r-r_H)]^2}\frac{\partial^2}{\partial {r_*}^2} + \frac{r_{H,\theta}}{2\kappa(r-r_H)^2}\frac{\partial}{\partial r_*},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi} = [1+\frac{1}{2\kappa(r-r_H)}]\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi_*} - \frac{r_{H,\varphi}[1+2\kappa(r-r_H)]}{[2\kappa(r-r_H)]^2}\frac{\partial^2}{\partial {r_*}^2} + \frac{r_{H,\varphi}}{2\kappa(r-r_H)^2}\frac{\partial}{\partial r_*},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v\partial\varphi} = \frac{\partial^2}{\partial v_*\partial\varphi_*} - \frac{r_{H,v}}{2\kappa(r-r_H)}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi_*} - \frac{r_{H,\varphi}}{2\kappa(r-r_H)}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*} + \frac{r_{H,v}r_{H,\varphi}}{[2\kappa(r-r_H)]^2}\frac{\partial^2}{\partial {r_*}^2} - \frac{r_{H,v}r_{H,\varphi} + r_{H,\varphi\varphi}(r-r_H)}{2\kappa(r-r_H)^2}\frac{\partial}{\partial r_*}. \quad \text{(B.4)}$$

特殊情形:

(1) 对于球对称黑洞, 因视界$r_H = r_H(v)$与θ和φ无关, 在方程(B.3) 和(B.4)中取$\theta_* = \theta$和$\varphi_* = \varphi$且

$$r_{H,\theta} = r_{H,\varphi} = r_{H,\theta\theta} = r_{H,\varphi\varphi} = 0\,.$$

(2) 对于轴对称时空, 因视界$r_H = r_H(v,\theta)$与φ无关, 在方程(B.3)和(B.4)中取$\varphi_* = \varphi$且

$$r_{H,\varphi} = r_{H,\varphi\varphi} = 0\,.$$

附录C　旋系数与场方程在零标架的Lorentz转动下的变换性质

在这个附录中，我们在Newman-Penrose表述[2, 5, 20, 51, 230–242]中直接给出场方程的零标架形式而不加以说明. 详情可参考[245, 246]以及Chandrasekhar 的著作[5].

C.1　无质量的自由场方程

Weyl方程($s = 1/2$)

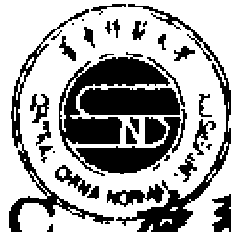
$$\begin{aligned}
&(D+\epsilon-\rho)\eta_1-(\bar{\delta}+\pi-\alpha)\eta_0=0\,,\\
&(\delta+\beta-\tau)\eta_1-(\Delta+\mu-\gamma)\eta_0=0\,.
\end{aligned} \tag{C.1}$$

无源的Maxwell方程($s = 1$)

$$\begin{aligned}
&(D-2\rho)\phi_1-(\bar{\delta}+\pi-2\alpha)\phi_0=-\kappa\phi_2\,,\\
&(\delta-2\tau)\phi_1-(\Delta+\mu-2\gamma)\phi_0=-\sigma\phi_2\,,\\
&(D+2\epsilon-\rho)\phi_2-(\bar{\delta}+2\pi)\phi_1=-\lambda\phi_0\,,\\
&(\delta+2\beta-\tau)\phi_2-(\Delta+2\mu)\phi_1=-\nu\phi_0\,.
\end{aligned} \tag{C.2}$$

Rarita-Schwinger方程($s = 3/2$)

$$\begin{aligned}
&(D-\epsilon-3\rho)\chi_1-(\bar{\delta}+\pi-3\alpha)\chi_0=-2\kappa\chi_2\,,\\
&(\delta-\beta-3\tau)\chi_1-(\Delta+\mu-3\gamma)\chi_0=-2\sigma\chi_2\,,\\
&(D+\epsilon-2\rho)\chi_2-(\bar{\delta}+2\pi-\alpha)\chi_1=-\kappa\chi_3-\lambda\chi_0\,,\\
&(\delta+\beta-2\tau)\chi_2-(\Delta+2\mu-\gamma)\chi_1=-\sigma\chi_3-\nu\chi_0\,,\\
&(D+3\epsilon-\rho)\chi_3-(\bar{\delta}+3\pi+\alpha)\chi_2=-2\lambda\chi_1\,,\\
&(\delta+3\beta-\tau)\chi_3-(\Delta+3\mu+\gamma)\chi_2=-2\nu\chi_1\,.
\end{aligned} \tag{C.3}$$



Newman-Penrose方程($s=2$)

$$
\begin{aligned}
&(D-2\epsilon-4\rho)\psi_1-(\bar{\delta}+\pi-4\alpha)\psi_0=-3\kappa\psi_2\,,\\
&(\delta-2\beta-4\tau)\psi_1-(\Delta+\mu-4\gamma)\psi_0=-3\sigma\psi_2\,,\\
&(D-3\rho)\psi_2-(\bar{\delta}+2\pi-2\alpha)\psi_1=-2\kappa\psi_3-\lambda\psi_0\,,\\
&(\delta-3\tau)\psi_2-(\Delta+2\mu-2\gamma)\psi_1=-2\sigma\psi_3-\nu\psi_0\,,\\
&(D+2\epsilon-2\rho)\psi_3-(\bar{\delta}+3\pi)\psi_2=-\kappa\psi_4-2\lambda\psi_1\,,\\
&(\delta+2\beta-2\tau)\psi_3-(\Delta+3\mu)\psi_2=-\sigma\psi_4-2\nu\psi_1\,,\\
&(D+4\epsilon-\rho)\psi_4-(\bar{\delta}+4\pi+2\alpha)\psi_3=-3\lambda\psi_2\,,\\
&(\delta+4\beta-\tau)\psi_4-(\Delta+4\mu+2\gamma)\psi_3=-3\nu\psi_2\,.
\end{aligned}
\tag{C.4}
$$

对于任意自旋为s的Bargmann-Wigner方程, 则有:

$$
\begin{aligned}
&[D+2(p-s+1)\epsilon+(p-2s)\rho]\Psi_{p+1}-[\bar{\delta}+(p+1)\pi+2(p-s)\alpha]\Psi_p\\
&=\ (p-2s+1)\kappa\Psi_{p+2}-p\lambda\Psi_{p-1}\,,\\
&[\delta+2(p-s+1)\beta+(p-2s)\tau]\Psi_{p+1}-[\Delta+(p+1)\mu+2(p-s)\gamma]\Psi_p\\
&=\ (p-2s+1)\sigma\Psi_{p+2}-p\nu\Psi_{p-1}\,,\quad (p=0,1,\cdots,2s-1)
\end{aligned}
\tag{C.5}
$$

或

$$
\begin{aligned}
&[D+2(h+1)\epsilon+(h-s)\rho]\Phi_{h+1}-[\bar{\delta}+(h+s+1)\pi+2h\alpha]\Phi_h\\
&=\ (h-s+1)\kappa\Phi_{h+2}+(h+s)\lambda\Phi_{h-1}\,,\\
&[\delta+2(h+1)\beta+(h-s)\tau]\Phi_{h+1}-[\Delta+(h+s+1)\mu+2h\gamma]\Phi_h\\
&=\ (h-s+1)\sigma\Phi_{h+2}+(h+s)\nu\Phi_{h-1}\,.\quad (h=-s,1-s,\cdots,s-1,s)
\end{aligned}
\tag{C.6}
$$

C.2 有质量的自由场方程

Klein-Gordon方程($s=0$)

$$
\begin{aligned}
&[\,(\Delta+\mu+\mu^*-\gamma-\gamma^*)D-(\delta+\pi^*-\alpha^*+\beta-\tau)\bar{\delta}\\
&+(D-\rho-\rho^*)\Delta-(\bar{\delta}+\pi-\alpha+\beta^*-\tau^*)\delta-m^2]\Phi=0\,.
\end{aligned}
\tag{C.7}
$$

Dirac方程($s = 1/2$)

$$
\begin{aligned}
&(D+\epsilon-\rho)F_1-(\overline{\delta}+\pi-\alpha)F_0=imG_1\,,\\
&(\delta+\beta-\tau)F_1-(\Delta+\mu-\gamma)F_0=imG_0\,,\\
&(D+\epsilon^*-\rho^*)G_0-(\delta+\pi^*-\alpha^*)G_1=-imF_0\,,\\
&(\overline{\delta}+\beta^*-\tau^*)G_0-(\Delta+\mu^*-\gamma^*)G_1=-imF_1\,.
\end{aligned}
\tag{C.8}
$$

不难验证(φ为任意相因子):

$$
F_0^*=e^{i\varphi}G_1\,,\;\; F_1^*=e^{i\varphi}G_0\,,\;\; G_0^*=e^{i\varphi}F_1\,,\;\; G_1^*=e^{i\varphi}F_0\,. \tag{C.9}
$$

C.3 零标架的三类Lorentz转动

在第I类转动下, 方向导数的变换为

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{D}=D\,,\;\;\widetilde{\Delta}=\Delta+z\delta+z^*\overline{\delta}+z^*zD\,,\\
&\widetilde{\delta}=\delta+z^*D\,,\;\;\widetilde{\overline{\delta}}=\overline{\delta}+zD\,.
\end{aligned}
\tag{C.10}
$$

第II类转动与第I类转动的关系为作交换: $D\rightleftharpoons\Delta$ 和$\delta\rightleftharpoons\overline{\delta}$, 因此下面不作考虑. 在第III类转动下, 方向导数的变换为

$$
\widetilde{D}=A^{-1}D\,,\;\widetilde{\Delta}=A\Delta\,,\;\widetilde{\delta}=e^{i\theta}\delta\,,\;\widetilde{\overline{\delta}}=e^{-i\theta}\overline{\delta}\,. \tag{C.11}
$$

C.4 旋系数在零标架的Lorentz转动下的变换性质

在第I类转动下, 旋系数的变换为

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\kappa}=\kappa\,,\;\widetilde{\sigma}=\sigma+z^*\kappa\,,\;\widetilde{\epsilon}=\epsilon+z\kappa\,,\;\widetilde{\rho}=\rho+z\kappa\,,\\
&\widetilde{\tau}=\tau+z\sigma+z^*\rho+z^*z\kappa\,,\;\widetilde{\beta}=\beta+z\sigma+z^*\epsilon+z^*z\kappa\,,\\
&\widetilde{\alpha}=\alpha+z(\epsilon+\rho)+z^2\kappa\,,\;\widetilde{\pi}=\pi+2z\epsilon+z^2\kappa+Dz\,,\\
&\widetilde{\gamma}=\gamma+z(\beta+\tau)+z^*\alpha+z^*z(\epsilon+\rho)+z^2\sigma+z^*z^2\kappa\,,\\
&\widetilde{\mu}=\mu+2z\beta+z^*\pi+2z^*z\epsilon+z^2\sigma+z^*z^2\kappa+\delta z+z^*Dz\,,\\
&\widetilde{\lambda}=\lambda+z(\pi+2\alpha)+z^2(2\epsilon+\rho)+z^3\kappa+\overline{\delta}z+zDz\,,\\
&\widetilde{\nu}=\nu+z(\mu+2\gamma)+z^*\lambda+z^*z(\pi+2\alpha)+z^2(2\beta+\tau)\\
&\quad+z^*z^2(2\epsilon+\rho)+z^3\sigma+z^*z^3\kappa+(\Delta+z\delta+z^*\overline{\delta}+z^*zD)z\,.
\end{aligned}
\tag{C.12}
$$

在第III类转动下，旋系数的变换为

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\kappa}=A^{-2}e^{i\theta}\kappa\,,\ \widetilde{\sigma}=A^{-1}e^{2i\theta}\sigma\,,\ \widetilde{\lambda}=Ae^{-2i\theta}\lambda\,,\ \widetilde{\nu}=A^{2}e^{-i\theta}\nu\,,\\
&\widetilde{\epsilon}=A^{-1}\epsilon-\frac{1}{2}A^{-2}DA+\frac{i}{2}A^{-1}D\theta\,,\ \widetilde{\gamma}=A\gamma-\frac{1}{2}\Delta A+\frac{i}{2}A^{-1}\Delta\theta\,,\\
&\widetilde{\alpha}=e^{-i\theta}(\alpha-\frac{1}{2}A^{-1}\bar{\delta}A+\frac{i}{2}\bar{\delta}\theta)\,,\ \widetilde{\beta}=e^{i\theta}(\beta-\frac{1}{2}A^{-1}\delta A+\frac{i}{2}\delta\theta)\,,\\
&\widetilde{\rho}=A^{-1}\rho\,,\ \widetilde{\mu}=A\mu\,,\ \widetilde{\pi}=e^{-i\theta}\pi\,,\ \widetilde{\tau}=e^{i\theta}\tau\,.
\end{aligned}
\tag{C.13}
$$

C.5 旋量在零标架的Lorentz转动下的变换性质

在第I类转动下，无质量场的变换为

$$
\widetilde{\eta}_0=\eta_0\,,\quad \widetilde{\eta}_1=\eta_1+z\eta_0\,. \tag{C.14}
$$

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\phi}_0=\phi_0\,,\quad \widetilde{\phi}_1=\phi_1+z\phi_0\,,\\
&\widetilde{\phi}_2=\phi_2+2z\phi_1+z^2\phi_0\,.
\end{aligned}
\tag{C.15}
$$

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\chi}_0=\chi_0\,,\quad \widetilde{\chi}_1=\chi_1+z\chi_0\,,\\
&\widetilde{\chi}_2=\chi_2+2z\chi_1+z^2\chi_0\,,\\
&\widetilde{\chi}_3=\chi_3+3z\chi_2+3z^2\chi_1+z^3\chi_0\,.
\end{aligned}
\tag{C.16}
$$

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\psi}_0=\psi_0\,,\quad \widetilde{\psi}_1=\psi_1+z\psi_0\,,\\
&\widetilde{\psi}_2=\psi_2+2z\psi_1+z^2\psi_0\,,\\
&\widetilde{\psi}_3=\psi_3+3z\psi_2+3z^2\psi_1+z^3\psi_0\,,\\
&\widetilde{\psi}_4=\psi_4+4z\psi_3+6z^2\psi_2+4z^3\psi_1+z^4\psi_0\,.
\end{aligned}
\tag{C.17}
$$

有质量场的变换为

$$
\widetilde{\Phi}=\Phi\,. \tag{C.18}
$$

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{F}_0=F_0\,,\ \widetilde{F}_1=F_1+zF_0\,,\\
&\widetilde{G}_0=G_0-z^*G_1\,,\ \widetilde{G}_1=G_1\,.
\end{aligned}
\tag{C.19}
$$

在第III类转动下，无质量场的变换为

$$\widetilde{\eta}_0 = A^{-1/2}e^{i\theta/2}\eta_0\,,\;\; \widetilde{\eta}_1 = A^{1/2}e^{-i\theta/2}\eta_1\,. \tag{C.20}$$

$$\widetilde{\phi}_0 = A^{-1}e^{i\theta}\phi_0\,,\;\; \widetilde{\phi}_1 = \phi_1\,,\;\; \widetilde{\phi}_2 = Ae^{-i\theta}\phi_2\,. \tag{C.21}$$

$$\begin{aligned}&\widetilde{\chi}_0 = A^{-3/2}e^{3i\theta/2}\chi_0\,,\;\; \widetilde{\chi}_1 = A^{-1/2}e^{i\theta/2}\chi_1\,,\\ &\widetilde{\chi}_2 = A^{1/2}e^{-i\theta/2}\chi_2\,,\;\; \widetilde{\chi}_3 = A^{3/2}e^{-3i\theta/2}\chi_3\,.\end{aligned} \tag{C.22}$$

$$\begin{aligned}&\widetilde{\psi}_0 = A^{-2}e^{2i\theta}\psi_0\,,\;\; \widetilde{\psi}_1 = A^{-1}e^{i\theta}\psi_1\,,\\ &\qquad\quad \widetilde{\psi}_2 = \psi_2\,,\\ &\widetilde{\psi}_3 = Ae^{i\theta}\psi_3\,,\;\; \widetilde{\psi}_4 = A^2e^{-2i\theta}\psi_4\,.\end{aligned} \tag{C.23}$$

有质量场的变换为

$$\widetilde{\Phi} = \Phi\,. \tag{C.24}$$

$$\begin{aligned}&\widetilde{F}_0 = A^{-1/2}e^{i\theta/2}F_0\,,\;\; \widetilde{F}_1 = A^{1/2}e^{-i\theta/2}F_1\,,\\ &\widetilde{G}_0 = A^{1/2}e^{i\theta/2}G_0\,,\;\; \widetilde{G}_1 = A^{-1/2}e^{-i\theta/2}G_1\,.\end{aligned} \tag{C.25}$$

参考文献

[1] A. F. Zakharov, *Physics Uspekhi*, **42** (1999) 947.

[2] V. P. Frolov and I. D. Novikov, *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*, (Kluwer Academic Pub., 1998);
I. D. Novikov and V. P. Frolov, *Black Hole Physics* (The Physics of Black Holes), (Kluwer Acad. Press, 1989).

[3] D. V. Gal'tsov, *Particles and Fields near Black Holes*, (Izd MGU, 1986).

[4] K. S. Thorne, R. M. Price and D. A. Macdonald, *Black Holes: The Membrane Paradigm*, (Yale University Press, 1986).

[5] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, (Oxford University Press, 1983).

[6] 须重明, 吴雪君:《广义相对论与现代宇宙学》, (南京师范大学出版社, 1999年).

[7] K. S. Thorne, *Black Holes and Time Warps*, (Norton Company, 1994) [索恩著, 李泳译,《黑洞与时间弯曲》, (湖南科学技术出版社, 2000年)].

[8] R. P. Kerr, *Phys. Rev. Lett.* **11** (1963) 237;
E. T. Newman and A. I. Janis, *J. Math. Phys.* **6** (1965) 915;
E. T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash and R. Torrence, *J. Math. Phys.* **6** (1965) 918.

[9] R. H. Boyer and R. W. Lindquist, *J. Math. Phys.* **8** (1967) 265.

[10] M. Kasuya, *Phys. Rev.* **D25** (1982) 995.

[11] P. Yasskin, *Phys. Rev.* **D12** (1975) 2212.

[12] M. J. Bowick, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 2823.

[13] Y. J. Wang and M. W. Luo, *Chin. Phys. Lett.* **16** (1999) 162.

[14] H. W. Yu and Y. J. Wang, *Science in China*, **A10** (1991) 1087 [余洪伟, 王永久, 中国科学, **A10** (1991) 1087]; *Chinese Science Bulletin*, **36** (1991) 734 [科学通报, **36** (1991) 734].

[15] H. W. Yu, J. L. Jing and Y. J. Wang, *Chinese Science Bulletin*, **36** (1991) 1693 [余洪伟, 荆继良, 王永久, 科学通报, **36** (1991) 1693].

[16] A. Sen, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1006.

[17] A. Garcia, D. Gal'tsov and O. Kechkin, *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 1276.

[18] W. Bonnor and P. Vaidya, *Gen. Rel. Grav.* **1** (1970) 127.

[19] M. Carmeli and M. Kaye, *Ann. Phys. (NY)* **103** (1977) 97.

[20] M. Carmeli, *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*, (John Wiley & Sons, 1982).

[21] C. Gonzalez, L. Herrera and J. Jimenez, *J. Math. Phys.* **20** (1979) 837.

[22] J. L. Jing and Y. J. Wang, *Int. J. Theor. Phys.* **35** (1996) 1481.

[23] H. W. Yu, J. L. Jing and Y. J. Wang, *Science in China*, **A37** (1992) 283 [余洪伟, 荆继良, 王永久, 中国科学, **A37** (1992) 283].

[24] W. Kinnersley, *Phys. Rev.* **186** (1969) 1335; *Phys. Rev.* **D2** (1970) 1359; *J. Math. Phys.* **10** (1969) 1195.

[25] Z. M. Tang and Y. J. Wang, *Chinese Science Bulletin*, **30** (1985) 1118 [唐智明, 王永久, 科学通报, **30** (1985) 1118].

[26] Y. J. Wang and Z. M. Tang, *Science in China*, **A5** (1986) 525 [王永久, 唐智明, 中国科学, **A5** (1986) 525].

[27] J. F. Plebanski and M. Demianski, *Ann. Phys. (NY)* **98** (1976) 98.

[28] H. Farhoosh and R. L. Zimmerman, *Phys. Rev.* **D21** (1980) 317, 2064; *J. Math. Phys.* **20** (1979) 2272.

[29] H. W. Yu, *Phys. Lett.* **A209** (1995) 6.

[30] P. Yi, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 382.

[31] J. L. Jing, H. W. Yu and Y. J. Wang, *Chin. Phys. Lett.* **9** (1992) 113;
D. Y. Xu, *ibid.* **15** (1998) 706.

[32] R. Penrose, *Rivista Nuovo Cimento*, **1** (1969) 252.

[33] R. Penrose and R. Floyd, *Nature*, **229** (1971) 193.

[34] R. D. Blandford and R. L. Znajek, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **179** (1977) 433.

[35] D. X. Wang, K. Xiao and W. H. Lei, *Chin. Phys. Lett.* **19** (2002) 605.

[36] G. Denardo and R. Ruffini, *Phys. Lett.* **B45** (1973) 259.

[37] G. Denardo, L. Hively and R. Ruffini, *Phys. Lett.* **B50** (1974) 270.

[38] G. Rhoades and R. Ruffini, *Phys. Rev. Lett.* **32** (1974) 324.

[39] C. W. Misner, *Phys. Rev. Lett.* **28** (1972) 994.

[40] W. T. Zaumen, *Nature*, **247** (1974) 530;
G. Gibbons, *Commun. Math. Phys.* **44** (1975) 245.

[41] Ya. B. Zel'dovich, *JETP Lett.* **14** (1971) 180; *Sov. Phys. -JETP* **35** (1972) 1085.

[42] Ya. B. Zel'dovich and A. A. Starobinsky, *Sov. Phys. -JETP* **34** (1972) 1159.

[43] A. A. Starobinsky, *Sov. Phys. -JETP* **37** (1973) 28.

[44] W. G. Unruh, *Phys. Rev. Lett.* **31** (1973) 1265.

[45] W. G. Unruh, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 3194.

[46] R. M. Wald, *Phys. Rev.* **D13** (1976) 3176.

[47] R. Güven, *Phys. Rev.* **D16** (1977) 1706.

[48] M. Martellini and A. Treve, *Phys. Rev.* **D15** (1977) 3060.

[49] C. H. Lee, *Phys. Lett.* **B68** (1977) 152.

[50] S. M. Wagh and N. Dadhich, *Phys. Rev.* **D32** (1985) 1863.

[51] 赵峥,《黑洞的热性质与时空奇异性: 零曲面附近的量子效应》, (北京师范大学出版社, 1999年).

[52] 赵峥,《黑洞与弯曲的时空》, (山西科学技术出版社, 2000年).

[53] P. Kraus, "Non-thermal Aspects of Black Hole Radiance", (Ph.D thesis), gr-qc/9508007.

[54] R. V. Korkin and I. B. Khriplovich, "Nonthermal Radiation of Rotating Black Hole", gr-qc/0107101.

[55] D. Christodoulou, *Phys. Rev. Lett.* **25** (1970) 1596.

[56] D. Christodoulou and R. Ruffini, *Phys. Rev.* **D4** (1971) 3552.

[57] S. W. Hawking, *Nature*, **248** (1974) 30; *Commun. Math. Phys.* **43** (1975) 199.

[58] R. Wald, *Commun. Math. Phys.* **45** (1975) 9.

[59] W. Israel, *Phys. Lett.* **A57** (1976) 107.

[60] W. G. Unruh, *Phys. Rev.* **D14** (1976) 870.

[61] W. G. Unruh and R. Wald, *Phys. Rev.* **D29** (1984) 1047.

[62] V. P. Frolov, "Quantum Effects near Black Holes", in *Trends in Theoretical Physics*, Vol.2, pp27-75, edited by P. J. Ellis and Y. C. Tang, (Addison-Wesley Publish Company, 1991).

[63] R. Brout, S. Massar, R. Parentani and P. Spindel, *Phys. Rep.* **260** (1995) 329.

[64] R. Parentani and R. Brout, *Int. J. Mod. Phys.* **D1** (1992) 169.

[65] F. Benachenhou, "Black Hole Evaporation: A Survey", (Ph.D thesis), hep-th/9412189.

[66] J. Traschen, "An Introduction to Black Hole Evaporation", gr-qc/0010055.

[67] N. Deruelle and R. Ruffini, *Phys. Lett.* **B52** (1974) 437; *ibid.* **B57** (1975) 248.

[68] T. Damour and R. Ruffini, *Phys. Rev. Lett.* **35** (1975) 463.

[69] P. Candelas, *Phys. Rev.* **D21** (1980) 2185.

[70] V. P. Frolov, *Phys. Rev.* **D26** (1982) 954.

[71] V. P. Frolov and A. I. Zel'nikov, *Phys. Rev.* **D29** (1984) 1057, 3150.

[72] H. P. Nollert, *Class. Quant. Grav.* **16** (1999) R159.

[73] K. D. Kokkotas and B. G. Schmidt, *Living Rev. Rel.* **2** (1999) 1999-2, gr-qc/9909058.

[74] K. D. Kokkotas, *IL Nuovo Cimento*, **B108** (1993) 991.

[75] L. Barack, *Phys. Rev.* **D61** (2000) 024026, gr-qc/9908005.

[76] H. Koyama and A. Tomimatsu, *Phys. Rev.* **D63** (2001) 064032, gr-qc/0012022; *ibid.* **D64** (2001) 044014, gr-qc/0103086.

[77] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **31** (1973) 161.

[78] R. M. Wald, *General Relativity*, (Chicago University Press, 1984).

[79] 张镇九,《现代相对论及黑洞物理学》,(华中师范大学出版社, 1986年).

[80] 刘辽,《广义相对论》,(高等教育出版社, 1987年).

[81] 黄焕然, 周并举, 张镇九,《弯曲时空量子场论》,(华中师范大学出版社, 1994年).

[82] 张镇九,《相对论物理学》,(华中师范大学出版社, 1997年).

[83] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev.* **D5** (1972) 1239, 2403; *ibid.* **D7** (1973) 2333.

[84] L. Smarr, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 71, E521.

[85] J. D. Bekenstein, *Lett. Nuovo Cimento*, **4** (1972) 737; *Phys. Rev.* **D9** (1974) 3292.

[86] D. X. Wang, *Acta Astrophysica Sinica*, **11** (1991) 6 [汪定雄, 天体物理学报, **11** (1991) 6].

[87] Z. J. Luo and J. Y. Zhu, *Acta Physica Sinica*, **48** (1999) 395 [罗智坚, 朱建阳, 物理学报, **48** (1999) 395].

[88] W. B. Liu and Z. Zhao, *Phys. Rev.* **D61** (2000) 063003.

[89] Y. G. Shen and Z. Y. Chen, *Int. J. Theor. Phys.* **40** (2001) 1009.

[90] J. L. Jing and M. L. Yan, *Phys. Rev.* **D60** (1999) 084015.

[91] J. L. Jing and M. L. Yan, *Phys. Rev.* **D61** (2000) 044016.

[92] J. L. Jing and M. L. Yan, *Phys. Rev.* **D63** (2001) 084028.

[93] J. L. Jing and M. L. Yan, *Phys. Rev.* **D64** (2001) 064015.

[94] X. Li and Z. Zhao, *Phys. Rev.* **D62** (2000) 104001.

[95] C. J. Gao and Y. G. Shen, *Chin. Phys. Lett.* **18** (2001) 1167.

[96] G. t' Hooft, *Nucl. Phys.* **B256** (1985) 727.

[97] W. H. Zurek and K. S. Thorne, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 2171.

[98] L. Bombelli, R. Koul, J. Lee and R. Sorkin, *Phys. Rev.* **D34** (1986) 373.

[99] V. Frolov and I. Novikov, *Phys. Rev.* **D48** (1993) 4545, gr-qc/9309001.

[100] M. Maggiore, *Nucl. Phys.* **B429** (1994) 205, gr-qc/9401027.

[101] J. D. Bekenstein, "Do We Understand Black Hole Entropy", gr-qc/9409015.

[102] L. Susskind and J. Uglum, *Phys. Rev.* **D50** (1994) 2700, hep-th/9401070.

[103] V. Frolov, *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 3319, gr-qc/9406037.

[104] M. H. Lee and J. K. Kim, hep-th/9604130; *Phys. Lett.* **A212** (1996) 323, hep-th/9602129.

[105] J. W. Ho, W. T. Kim, Y. J. Park and H. J. Shin, *Class. Quant. Grav.* **14** (1997) 2617, gr-qc/9704032.

[106] S. Mukohyama, "The Origin of Black Hole Entropy", (Ph. D thesis), gr-qc/9812079.

[107] R. M. Wald, *Phys. Rev.* **D56** (1997) R6467.

[108] S. Q. Wu and X. Cai, *IL Nuovo Cimento*, **B115** (2000) 143, gr-qc/0004040.

[109] Z. Zhao, J. Y. Zhu and W. B. Liu, *Chin. Phys. Lett.* **16** (1999) 698.

[110] Z. Zhao, *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1539.

[111] Z. Zhao and J. Y. Zhu, *Acta Physica Sinica*, **48** (1999) 1558 [赵峥, 朱建阳, 物理学报, **48** (1999) 1558].

[112] P. Candelas and B. P. Jensen, *Phys. Rev.* **D33** (1986) 1596.

[113] E. W. Leaver, *Proc. R. Soc. Lond.* **A402** (1985) 285.

[114] H. Onozawa, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 3593.

[115] H. Suzuki, E. Takasugi and H. Umetsu, *Prog. Theor. Phys.* **103** (2000) 723.

[116] B. F. Whiting, *J. Math. Phys.* **30** (1989) 1301.

[117] C. M. Chambers and I. G. Moss, *Class. Quant. Grav.* **11** (1994) 1035.

[118] Y. Mino, M. Sasaki, M. Shibata, H. Tagoshi and T. Tanaka, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **128** (1997) 1.

[119] A. L. Dudley and J. D. Finley, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 1505; *J. Math. Phys.* **20** (1979) 311.

[120] M. Ahmed and P. Dolan, *Gen. Rel. Grav.* **18** (1986) 953, 961;
M. Ahmed, *ibid.* **19** (1987) 953; *ibid.* **20** (1988) 97;
M. Ahmed and A. Ansary, *ibid.* **22** (1990) 73.

[121] U. Khanal, and N. Panchapakesan, *Phys. Rev.* **D24** (1981) 829, 835.

[122] M. Soffel, B. Muller and W. Greiner, *J. Phys.* **A10** (1977) 551.

[123] F. de Felice, *Phys. Rev.* **D19** (1979) 451.

[124] C. M. Xu and G. Z. Xie, *Chinese Science Bulletin*, **25** (1980) 1063 [须重明, 谢光中, 科学通报, **25** (1980) 1063].

[125] J. M. Cohen and R. T. Powers, *Commun. Math. Phys.* **86** (1982) 69.

[126] S. W. Zhang and R. K. Su, *Acta Physica Sinica*, **31** (1982) 311 [章世伟, 苏汝铿, 物理学报, **31** (1982) 311].

[127] S. W. Zhang, *Acta Physica Sinica*, **32** (1983) 823 [章世伟, 物理学报, **32** (1983) 823].

[128] D. M. Zhang and Y. J. Li, *Commun. in Theor. Phys.* **4** (1985) 853 [张端明, 李元杰, 理论物理通讯, **4** (1985) 853].

[129] Y. J. Li and D. M. Zhang, *Physica Energiae Fortis Et Physica Nuclearis*, **10** (1986) 412 [李元杰, 张端明, 高能物理与核物理, **10** (1986) 412].

[130] Y. J. Li, *Physica Energiae Fortis Et Physica Nuclearis*, **11** (1987) 198 [李元杰, 高能物理与核物理, **11** (1987) 198].

[131] Y. J. Li, *Aust. J. Phys.* **45** (1992) 127.

[132] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, (Cambridge University Press, 1982).

[133] S. Persides, *J. Math. Phys.* **14** (1973) 1017.

[134] D. Lohia and N. Panchapakesan, *J. Phys.* **A11** (1978) 1963; *ibid.* **A12** (1979) 533.

[135] W. H. Press and S. A. Teukolsky, *Astrophys. J.* **185** (1973) 649.

[136] R. A. Breuer, M. P. Ryan and S. Waller, *Proc. R. Soc. Lond.* **A358** (1977) 71.

[137] E. D. Fackerell and R. G. Crossman, *J. Math. Phys.* **18** (1977) 1849.

[138] K. G. Suffern, E. D. Fackerell and C. M. Cosgrove, *J. Math. Phys.* **24** (1983) 1350.

[139] D. A. Leahy and W. G. Unruh, *Phys. Rev.* **D19** (1979) 3509.

[140] S. K. Chakrabarti, *Proc. R. Soc. Lond.* **A391** (1984) 27.

[141] E. Seidel, *Class. Quant. Grav.* **6** (1989) 1057.

[142] E. G. Kalnins and W. Jr. Miller, *J. Math. Phys.* **33** (1992) 286.

[143] B. P. Jensen, J. G. McLaughlin and A. C. Ottewill, *Phys. Rev.* **D51** (1995) 5676.

[144] J. M. Bardeen and W. H. Press, *J. Math. Phys.* **14** (1973) 7.

[145] D. Page, *Phys. Rev.* **D13** (1973) 198.

[146] C. H. Lee, *J. Math. Phys.* **17** (1976) 1226.

[147] R. F. Arenstorf, J. M. Cohen and L. S. Kegeles, *J. Math. Phys.* **19** (1978) 833.

[148] B. R. Iyer and A. Kumar, *Pramana*, **11** (1978) 171; *ibid.* **12** (1979) 103.

[149] A. Zecca, *IL Nuovo Cimento*, **B113** (1998) 1309; *ibid.* **B115** (2000) 625.

[150] F. Belgiorno and M. Martellini, *Phys. Lett.* **B453** (1999) 17.

[151] B. Mukhopadhyay and S. K. Chakrabarti, *Class. Quant. Grav.* **16** (1999) 3165; *Nucl. Phys.* **B582** (2000) 627.

[152] S. K. Chakrabarti and B. Mukhopadhyay, *IL Nuovo Cimento*, **B115** (2000) 885; "Scattering of Dirac Waves off Kerr Black Holes", astro-ph/0007277.

[153] B. Mukhopadhyay, *Class. Quant. Grav.* **17** (2000) 2017; *ibid.* **19** (2002) 2307.

[154] J. Blandin, R. Pons and G. Marcilhacy, *Lett. Nuovo Cimento*, **38** (1983) 561.

[155] S. A. Teukolsky, *Phys. Rev. Lett.* **29** (1972) 1114; *Astrophys. J.* **185** (1973) 635.

[156] S. A. Teukolsky and W. H. Press, *Astrophys. J.* **193** (1974) 443.

[157] B. Carter and R. G. Mclenaghan, "Generalised Master Equations for Wave Equation Separation in a Kerr or Kerr-Newman Black Hole Background", in *Proceedings of the Second Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, edited by R. Ruffini, pp575, (North-Holland Publishing Company, 1982).

[158] U. Khanal, *Phys. Rev.* **D28** (1983) 1291; *ibid.* **D32** (1985) 879.

[159] B. P. Jensen and P. Candelas, *Phys. Rev.* **D33** (1986) 1590.

[160] E. W. Leaver, *J. Math. Phys.* **27** (1986) 1238.

[161] J. W. Liu, *J. Math. Phys.* **32** (1992) 4026.

[162] B. D. B. Figneiredo and M. Novello, *J. Math. Phys.* **34** (1993) 3121.

[163] S. Q. Wu and X. Cai, *J. Math. Phys.* **40** (1999) 4538, gr-qc/9904037.

[164] S. Q. Wu and X. Cai, "Massive Complex Scalar Field in the Kerr-Sen Geometry: Exact Solution of Wave Equation and Hawking Radiation", submitted to *J. Math. Phys.*, gr-qc/0107037.

[165] H. Suzuki, E. Takasugi and H. Umetsu, *Prog. Theor. Phys.* **100** (1998) 491; *ibid.* **102** (1999) 253.

[166] K. Heun, *Math. Ann.* **33** (1889) 161.

[167] *Heun's Differential Equations*, edited by A. Ronveaux, (Oxford Science Publications, 1995).

[168] S. Mano, H. Suzuki and E. Takasugi, *Prog. Theor. Phys.* **95** (1996) 1079; *ibid.* **96** (1996) 549.

[169] H. Suzuki and E. Takasugi, *Prog. Theor. Phys.* **97** (1997) 213.

[170] T. Masuda and H. Suzuki, *J. Math. Phys.* **38** (1997) 3669.

[171] C. G. Lambe and D. R. Ward, *Quart. J. Math.* **5** (1934) 81.

[172] A. Erdelyi, *Quart. J. Math.* **13** (1942) 107.

[173] G. Valent, *SIAM. J. Math. Anal.* **17** (1986) 688 ; math. CA/9307204.

[174] W. E. Couch, *J. Math. Phys.* **22** (1981) 1849; *ibid.* **26** (1985) 2286.

[175] D. R. Brill, P. L. Chrzanowski, C. M. Pereira, E. D. Fackerell and J. R. Isper, *Phys. Rev.* **D5** (1972) 1913.

[176] D. J. Rowan and G. Stephensen, *J. Phys.* **A10** (1977) 15.

[177] S. Detweiler, *Phys. Rev.* **D22** (1980) 2323.

[178] S. W. Hawking, *Phys. Rev.* **D13** (1976) 191.

[179] D. Lee, *Nucl. Phys.* **B264** (1986) 437.

[180] S. W. Hawking and R. Penrose, *The Nature of Space and Time*, (Princeton University Press, 1996) [霍金, 彭罗斯著, 杜欣欣, 吴忠超译,《时空本性》, (湖南科学技术出版社, 1997年)].

[181] J. B. Hartle and S. W. Hawking, *Phys. Rev.* **D13** (1976) 2188.

[182] T. Damour and R. Ruffini, *Phys. Rev.* **D14** (1976) 332.

[183] Z. H. Li and L. Liu, *Acta Physica Sinica*, **46** (1997) 1273.

[184] B. Carter, *Phys. Rev.* **174** (1968) 1559.

[185] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, (McGraw-Hill, 1953);
P. Moon and D. E. Spencer, *Field Theory Handbook*, 2nd version, (Springer-Verlag, 1971);
Handbook of Mathematical Functions, edited by M. Abramowitz and I. A. Stegun, 9th version, (Dover, 1972).

[186] E. T. Newman and R. Penrose, *J. Math. Phys.* **7** (1966) 863.

[187] J. N. Goldberg, A. J. Macfarlane, E. T. Newman, F. Rohrlich and E. C. G. Sudarshan, *J. Math. Phys.* **8** (1967) 2155.

[188] J. N. Goldberg, *J. Math. Phys.* **8** (1967) 2161.

[189] R. J. Torrence and A. I. Janis, *J. Math. Phys.* **8** (1967) 1355.

[190] W. B. Campbell, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 1763.

[191] G. J. Weir, *J. Math. Phys.* **20** (1979) 1648.

[192] T. Dray, *J. Math. Phys.* **26** (1985) 1030.

[193] S. Q. Wu and X. Cai, *Int. J. Theor. Phys.* **39** (2000) 2215, hep-th/0009088.

[194] T. Okai, *Prog. Theor. Phys.* **92** (1994) 47.

[195] S. W. Hawking, *A Brief History of Time*, (Bantam Books, 1986, 1996) [霍金著, 许明贤, 吴忠超译, 《时间简史》, (湖南科学技术出版社, 1997年; 10年增订版, 2001年)].

[196] J. D. Bekenstein, "Gravitation, The Quantum, and Statistical Physics", in *To Fulfill a Vision: Jerusalem Einstein Centennial Symposium on Gauge Theories and Unification of Physical Forces*, edited by Y. Ne'eman, pp42-59, (Addison-Wesley Publishing Company, 1981)

[197] J. P. Liminet, *Les trous noirs*, (Pierre Belfond, 1987) [鲁米涅著, 卢炬甫译, 《黑洞》, (湖南科学技术出版社, 1997年)].

[198] G. W. Gibbons and M. J. Perry, *Proc. R. Soc. Lond.* **A358** (1978) 467.

[199] M. Y. Zhou, L. F. Chen and H. Y. Guo, *Acta Physica Sinica*, **32** (1983) 1127 [周敏耀, 陈良范, 郭汉英, 物理学报, **32** (1983) 1127].

[200] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, *Phys. Rev.* **D15** (1977) 2738, 2752.

[201] D. Boulware, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 1404; *ibid.* **D12** (1975) 350.

[202] L. H. Ford, *Phys. Rev.* **D12** (1975) 2963.

[203] B. R. Iyer and A. Kumar, *Phys. Rev.* **D18** (1978) 4799.

[204] B. Punsly, *Phys. Rev.* **D46** (1992) 1288, 1312.

[205] M. Martellini and A. Treve, *Phys. Rev.* **D15** (1977) 2415.

[206] S. Sannan, *Gen. Rel. Grav.* **20** (1988) 239.

[207] Z. Zhao and W. H. Huang, *J. Beijing Normal University* (Natural Science), **28** (1992) 317 [赵峥, 黄维华, 北京师范大学学报(自然科学版), **28** (1992) 3177].

[208] Z. Zhao, *Chin. Phys. Lett.* **9** (1992) 501.

[209] Z. Zhao and W. H. Huang, *Chin. Phys. Lett.* **9** (1992) 333.

[210] T. Jacobson and G. Kang, *Class. Quant. Grav.* **10** (1993) L201, gr-qc/9307002.

[211] A. S. Lapedes, *J. Math. Phys.* **19** (1978) 2289.

[212] K. Srinivasan and T. Padmanabhan, *Phys. Rev.* **D60** (1999) 024007, gr-qc/0007022;
S. Shankaranarayanan, K. Srinivasan and T. Padmanabhan, *Mod. Phys. Lett.* **A16** (2001) 571, gr-qc/0007022;
S. Shankaranarayanan, T. Padmanabhan and K. Srinivasan, *Class. Quant. Grav.* **19** (2002) 2671, gr-qc/0010042.

[213] M. K. Parikh and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 5042, hep-th/9907001.

[214] S. Massar and R. Parentani, *Nucl. Phys.* **B575** (2000) 333, gr-qc/9903027.

[215] R. Schutzhold, "On the Hawking Effect", gr-qc/0011047.

[216] H. C. Rosu, "Black Hole Thermal Effects in the Scattering Picture", gr-qc/9405072.

[217] W. G. Unruh, *Phys. Rev.* **D51** (1995) 2827, gr-qc/9409008.

[218] T. Jacobson, *Phys. Rev.* **D48** (1993) 728, hep-th/9303103.

[219] R. Brout, S. Massar, R. Parentani and P. Spindel, *Phys. Rev.* **D52** (1995) 4559, hep-th/9506121.

[220] M. Visser, "Essential and Inessential Feature of Hawking Radiation", hep-th/0106111.

[221] M. N. Zonoz and T. Padmanabhan, "The Classical Essence of Black Hole Radiance", gr-qc/9812088.

[222] C. Sivaram, *Gen. Rel. Grav.* **33** (2001) 175.

[223] S. Dimopoulos and G. Landsberg, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 111602, hep-ph/0106295;
S. B. Giddings, "Black Holes at Accelerators", hep-th/0205027.

[224] W. G. Unruh, *Phys. Rev. Lett.* **46** (1981) 1351.

[225] M. Visser, *Class. Quant. Grav.* **15** (1998) 1767, gr-qc/9712010.

[226] L. J. Garay, J. R. Anglin, J. I. Cirac and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 4643 (2000), gr-qc/0002015;
L. J. Garay, J. R. Anglin, J. I. Cirac and P. Zoller, "Sonic Black Holes in Dilute Bose-Einstein Condensates", gr-qc/0005131.

[227] M. Sakagami and A. Ohashi, "Hawking Radiation in Laboratories", gr-qc/0108072.

[228] C. Barcelo, S. Liberati and M. Visser, "Towards the Observation of Hawking Radiation in Bose-Einstein Condensates", gr-qc/0110036.

[229] C. W. Misner, K. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, (Freeman, 1973).

[230] E. T. Newman and R. Penrose, *J. Math. Phys.* **3** (1962) 566.

[231] A. I. Janis and E. T. Newman, *J. Math. Phys.* **6** (1965) 902.

[232] R. J. Torrence and A. I. Janis, *J. Math. Phys.* **8** (1967) 1355.

[233] F. J. Ernst, *J. Math. Phys.* **19** (1978) 489.

[234] G. A. Alekseev and V. I. Khlebnikov, *Sov. J. Part. Nucl.* **9** (1978) 421.

[235] V. P. Frolov, "The Newman-Penrose Method in the Theory of General Relativity", in *Problems in the General Theory of Relativity and Theory of Group Representations*, edited by N. G. Basov, translated by A. Mason, pp73-185, (New York, 1979).

[236] T. Nakamura, K. Oohara and Y. Kojima, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **90** (1987) 1.

[237] M. Carmeli, *Group Theory and General Relativity*, (McGraw-Hill Inc., 1977).

[238] D. Kramers, H. Stephani, M. MacCallum and E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Equations*, (Oxford University Press, 1980).

[239] J. Stewart, *Advanced General Relativity*, (Cambridge University Press, 1990).

[240] 王永久,《黑洞物理学》, (湖南师范大学出版社, 2000年).

[241] 王永久,《广义相对论与宇宙学》, (湖南科学技术出版社, 2000年).

[242] 陆启铿,《微分几何学及其在物理学中的应用》, (科学出版社, 1982年).

[243] D. Page, *Phys. Rev.* **D14** (1976) 1509.

[244] L. Liu and D. Y. Xu, *Acta Physica Sinica*, **29** (1980) 1617 [刘辽, 许殿彦, 物理学报, **29** (1980) 1617].

[245] D. Y. Xu and C. G. Chen, *Chinese Science Bulletin*, **23** (1980) 1103 [许殿彦, 陈崇光, 科学通报, **32** (1980) 1103].

[246] D. Y. Xu and C. G. Chen, *Acta Physica Sinica*, **30** (1981) 671 [许殿彦, 陈崇光, 物理学报, **30** (1981) 671].

[247] Z. Zhao, Y. X. Gui and L. Liu, *Acta Astrohysica Sinica*, **1** (1981) 141 [赵峥, 桂元星, 刘辽, 天体物理学报, **1** (1981) 141]; *Chin. Astron. Astrophys.* **5** (1981) 365.

[248] C. M. Xu and Y. G. Shen, *Acta Physica Sinica*, **31** (1982) 207 [须重明, 沈有根, 物理学报, **31** (1982) 207].

[249] D. Y. Xu, *Acta Physica Sinica*, **32** (1983) 225 [许殿彦, 物理学报, **32** (1983) 225].

[250] J. L. Jing, *Int. J. Theor. Phys.* **41** (2002) 101.

[251] Z. Zhao and D. H. Zhang, *Chinese Science Bulletin*, **29** (1984) 11 [赵峥, 章德海, 科学通报, **29** (1984) 11].

[252] B. J. Zhang, J. C. Zhang, X. C. Zhou and Z. Zhao, *J. Beijing Normal University* (Natural Science), **20** (1984) 35 [张宝金, 张金春, 周祥才, 赵峥, 北京师范大学学报(自然科学版), **20** (1984) 35].

[253] M. Ahmed and A. K. Mondal, *Phys. Lett.* **A184** (1993) 37.

[254] D. Y. Xu, *Acta Scientiarum Naturalinm Universitatis Pekinensis*, No. 2 (1983) 57 [许殿彦, 北京大学学报(自然科学版), No. 2 (1983) 57].

[255] Y. G. Shen and H. Y. Wang, *Chinese Science Bulletin*, **29** (1984) 1408 [许殿彦, 王辉毓, 科学通报, **29** (1984) 1408];
D. Y. Xu and H. Y. Wang, *Bull. Sci. Sinica*, **31** (1986) 570.

[256] Y. G. Shen, *Acta Physica Sinica*, **34** (1985) 1202 [沈有根, 物理学报, **34** (1985) 1202].

[257] D. Y. Xu and H. Y. Wang, *Acta Scientiarum Naturalinm Universitatis Pekinensis*, No. 5 (1985) 63 [许殿彦, 王辉毓, 北京大学学报(自然科学版), No. 5 (1985) 63].

[258] M. Ahmed, *Class. Quant. Grav.* **4** (1987) 431.

[259] M. Ahmed, *Phys. Lett.* **B258** (1991) 318.

[260] M. Ahmed and A. K. Mondal, *Int. J. Theor. Phys.* **34** (1995) 1871.

[261] Y. G. Shen, *Chinese Science Bulletin*, **31** (1986) 799 [沈有根, 科学通报, **31** (1986) 799]; *Bull. Sci. Sinica*, **32** (1987) 572.

[262] Z. Zhao and Y. X. Gui, *Acta Astrohysica Sinica*, **3** (1983) 146 [赵峥, 桂元星, 天体物理学报, **3** (1983) 146]; *Chin. Astron. Astrophys.* **7** (1983) 201.

[263] Z. Zhao, Y. X. Gui and L. Liu, *J. Beijing Normal University* (Natural Science), **19** (1983) 73 [赵峥, 桂元星, 刘辽, 北京师范大学学报(自然科学版), **19** (1983) 73].

[264] Y. G. Shen, *Chinese Science Bulletin*, **29** (1984) 446 [沈有根, 科学通报, **29** (1984) 446].

[265] S. W. Gao, Z. Peng and Z. Zhao, *J. Beijing Normal University* (Natural Science), **37** (2001) 493 [高尚伟, 彭征, 赵峥, 北京师范大学学报(自然科学版), **37** (2001) 493].

[266] W. A. Hiscock, *Phys. Rev.* **D21** (1980) 2057.

[267] D. A. Konkowski and T. M. Helliwell, *Phys. Rev.* **D50** (1994) 841.

[268] D. Pavon, *Phys. Rev.* **D43** (1991) 2495;
R. K. Su, R. G. Cai and P. K. N. Yu, *Phys. Rev.* **D50** (1994) 2932.

[269] D. Bekenstein and A. Meisels, *Phys. Rev.* **D15** (1976) 2775.

[270] Wu Shuang-Qing and Cai Xu, *Chin. Phys. Lett.* **18** (2001) 485, gr-qc/0102081.

[271] S. Q. Wu and X. Cai, *Gen. Rel. Grav.* **33** (2001) 1181, gr-qc/0104055.

[272] S. Q. Wu and X. Cai, *Gen. Rel. Grav.* **34** (2002) 557, gr-qc/0110039.

[273] S. Q. Wu and X. Cai, "Extra Spin-Rotation Coupling Effect in a Radiating Kerr Space-time", gr-qc/0104074.

[274] S. Q. Wu and X. Cai, *Gen. Rel. Grav.* **34** (2002) 605, gr-qc/0111044.

[275] S. Q. Wu and X. Cai, *Int. J. Theor. Phys.* **40** (2001) 1349, gr-qc/0104056.

[276] S. Q. Wu and X. Cai, *IL Nuovo Cimento*, **B116** (2001) 907, hep-th/0108033.

[277] S. Q. Wu and X. Cai, *Mod. Phys. Lett.* **A16** (2001) 1549, gr-qc/0108019.

[278] S. Q. Wu and X. Cai, *Int. J. Theor. Phys.* **41** (2002) 559, gr-qc/0111045.

[279] Wu Shuang-Qing and Cai Xu, *Chin. Phys. Lett.* **19** (2002) 141, gr-qc/0109080.

[280] S. Q. Wu and X. Cai, *Int. J. Theor. Phys.* **41** (2002) 641, gr-qc/0112014.

[281] S. Q. Wu and X. Cai, *Chin. Phys.* **11** (2002) No. 7 (to appear), gr-qc/0204005.

[282] 吴双清, 曾瑜, 蔡勖, "变加速直线运动黑洞中Weyl中微子的Hawking辐射", 已投稿到 物理学报.

[283] S. Q. Wu and X. Cai, *Gen. Rel. Grav.* **34** (2002) No. 8 (to appear), gr-qc/0202070.

[284] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-time*, (Cambridge University Press, 1973).

[285] S. W. Hawking, "The Event Horizon", in *Black Holes*, edited by C. DeWitt and B. S. DeWitt, pp1-56, (Gordon and Breach Science Publishers, 1973).

[286] P. Anninos, D. Bernstein, S. Brandt, J. Libson, J. Masso, E. Seidel, L. Smarr, W. M. Suen and P. Walker, *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 630, gr-qc/9403011.

[287] Jr. J. W. York, *Phys. Rev.* **D28** (1983) 2929; in *Quantum Theory of Gravity: Essays in Honor of the Sixtieth Birthday of Bryce S. De Witt*, edited by S. Christensen, pp135, (Hilger, Bristol, 1984).



[288] W. A. Hiscock, L. G. Williams and D. M. Eardley, *Phys. Rev.* **D26** (1982) 751.

[289] W. A. Hiscock, *Phys. Rev.* **D23** (1981) 2823;
R. Balbinot, *Phys. Rev.* **D33** (1986) 1611.

[290] J. Y. Zhu and Z. Zhao, *Chin. Phys. Lett.* **10** (1993) 510.

[291] Z. Zhao, *Science in China*, **A23** (1993) 178 [赵峥, 中国科学, **A23** (1993) 178].

[292] Z. Zhao and X. X. Dai, *Chin. Phys. Lett.* **8** (1991) 548.

[293] Z. Zhao and X. X. Dai, *Mod. Phys. Lett.* **A7** (1992) 1771.

[294] X. X. Dai and Z. Zhao, *Acta Physica Sinica*, **41** (1992) 869 [戴宪新, 赵峥, 物理学报, **41** (1992) 869].

[295] X. X. Dai, Z. Zhao and L. Liu, *Science in China*, **A23** (1993) 69 [戴宪新, 赵峥, 刘辽, 中国科学, **A23** (1993) 69].

[296] Z. H. Li and Zhao, *Chin. Phys. Lett.* **10** (1993) 126.

[297] Z. Zhao and Z. H. Li, *IL Nuovo Cimento*, **B108** (1993) 785.

[298] C. Q. Yang, Q. A. Ren and Z. Zhao, *Acta Physica Sinica* (Overseas Edition), **2** (1993) 161.

[299] B. Yang and Z. Zhao, *Int. J. Theor. Phys.* **32** (1993) 1237.

[300] B. Yang and Z. Zhao, *Acta Physica Sinica*, **43** (1994) 858 [杨波, 赵峥, 物理学报, **43** (1994) 858].

[301] Z. Zhao, C. Q. Yang and Q. A. Ren, *Gen. Rel. Grav.* **26** (1994) 1055.

[302] J. Y. Zhu, J. H. Zhang and Z. Zhao, *Int. J. Theor. Phys.* **33** (1994) 2137.

[303] J. Y. Zhu, J. H. Zhang and Z. Zhao, *Science in China*, **A24** (1994) 1056 [朱建阳, 张建华, 赵峥, 中国科学, **A24** (1994) 1056]; *Science in China*, **A38** (1995) 217.

[304] J. Y. Zhu, *Acta Physica Sinica* (Overseas Edition), **4** (1995) 241.

[305] Z. H. Li, *IL Nuovo Cimento*, **B110** (1995) 1429.

[306] J. H. Zhang and S. Y. Guo, *Acta Mathematica Scientia*, **15** (1995) 422 [张建华, 郭守元, 数学物理学报, **15** (1995) 422].

[307] J. H. Zhang, Q. M. Meng and C. A. Li, *Acta Physica Sinica*, **45** (1996) 177 [张建华, 孟庆苗, 李传安, 物理学报, **45** (1996) 177].

[308] Y. Ma and S. Z. Yang, *Acta Physica Sinica*, **46** (1997) 2280 [马勇, 杨树政, 物理学报, **46** (1997) 2280].

[309] Z. H. Li and Z. Zhao, *Acta Physica Sinica*, **46** (1997) 1273 [黎忠恒, 赵峥, 物理学报, **46** (1997) 1273].

[310] Z. H. Li, *Acta Physica Sinica*, **44** (1995) 505 [黎忠恒, 物理学报, **44** (1995) 505].

[311] Z. H. Li and Z. Zhao, *J. Beijing Normal University* (Natural Science), **34** (1998) 345 [黎忠恒, 赵峥, 北京师范大学学报(自然科学版), **34** (1998) 345].

[312] Z. H. Li, *Chin. Phys. Lett.* **15** (1998) 553.

[313] Z. H. Li, Y. Liang and L. Q. Mi, *IL Nuovo Cimento*, **B114** (1999) 555.

[314] Z. H. Li, Y. Liang and L. Q. Mi, *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 925.

[315] Z. H. Li, *Mod. Phys. Lett.* **A14** (1999) 1951.

[316] Z. H. Li and L. Q. Mi, *Acta Physica Sinica*, **48** (1999) 575 [黎忠恒, 米丽琴, 物理学报, **48** (1999) 575].

[317] D. Finkelstein, *Phys. Rev.* **110** (1958) 965.

[318] S. W. Kim, E. Y. Choi, S. K. Kim and J. Yang, *Phys. Lett.* **A141** (1989) 238.

[319] Z. Zhao, X. X. Dai and W. H. Huang, *Acta Astrophysica Sinica*, **13** (1993) 299 [赵峥, 戴宪新, 黄维华, 天体物理学报, **13** (1993) 299].

[320] Z. H. Li and Z. Zhao, *Science in China*, **A38** (1995) 74.

[321] J. L. Jing and Y. J. Wang, *Int. J. Theor. Phys.* **36** (1997) 1745.

[322] M. W. Lu, *Acta Physica Sinica*, **49** (2000) 1035 [卢卯旺, 物理学报, **49** (2000) 1035].

[323] Y. N. Obukhov, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 192;
B. Mashhoon, *Class. Quant. Grav.* **17** (2000) 2399; *Gel. Rel. Grav.* **31** (1999) 681;
B. Mashhoon, R. Neutze, M. Hannam and G. E. Stedman, *Phys. Lett.* **A249** (1998) 161;
L. H. Ryder and B. Mashhoon, "Spin and Rotation in General Relativity", gr-qc/0102101.

[324] D. Y. Xu, *Class. Quant. Grav.* **15** (1998) 153.

[325] Z. Q. Luo and Z. Zhao, *Acta Physica Sinica*, **42** (1993) 506 [罗志强, 赵峥, 物理学报, **42** (1993) 506].

[326] J. H. Zhang, J. Y. Zhu and Z. Zhao, *J. Beijing Normal University* (Natural Science), **29** (1993) 76 [张建华, 朱建阳, 赵峥, 北京师范大学学报(自然科学版), **29** (1993) 76].

[327] J. Y. Zhu, J. H. Zhang and Z. Zhao, *Acta Astronomica Sinica*, **35** (1994) 246 [朱建阳, 张建华, 赵峥, 天文学报, **35** (1994) 246].

[328] Q. A. Ren, C. Q. Yang and Z. Zhao, *Acta Mathematica Scientia*, **14** (1994) 429 [任秦安, 杨成全, 赵峥, 数学物理学报, **14** (1994) 429];
C. Q. Yang, Q. A. Ren and Z. Zhao, *Science in China*, **A24** (1994) 67 [杨成全, 任秦安, 赵峥, 中国科学, **A24** (1994) 67].

[329] Z. Zhao, J. H. Zhang and J. Y. Zhu, *Int. J. Theor. Phys.* **34** (1995) 2039.

[330] C. Q. Yang and Z. Zhao, *J. Beijing Normal University*(Natural Science), **35** (1999) 455 [杨成全, 赵峥, 北京师范大学学报(自然科学版), **35** (1999) 455].

[331] Z. Zhao, Z. Q. Luo and X. X. Dai, *IL Nuovo Cimento*, **B109** (1994) 483.

[332] S. Z. Yang, J. Y. Zhu and Z. Zhao, *Acta Physica Sinica* (Overseas Edition), **4** (1995) 147.

[333] S. Wu and Z. Zhao, *Acta Astronomica Sinica*, **34** (1993) 17 [吴思, 赵峥, 天文学报, **34** (1993) 17].

[334] M. C. Sun, R. Zhao and Z. Zhao, *Acta Physica Sinica*, **44** (1995) 1018 [孙鸣超, 赵仁, 赵峥, 物理学报, **44** (1995) 1018].

[335] M. C. Sun, R. Zhao and Z. Zhao, *IL Nuovo Cimento*, **B110** (1995) 829.

[336] S. Z. Yang and Z. Zhao, *Acta Physica Sinica*, **44** (1995) 498 [杨树政, 赵峥, 物理学报, **44** (1995) 498].

[337] S. Z. Yang and Z. Zhao, *Int. J. Theor. Phys.* **35** (1996) 2455.

[338] S. Z. Yang, X. G. Xiao and Z. Zhao, *Chinese Science Bulletin*, **38** (1993) 371 [杨树政, 肖新国, 赵峥, 科学通报, **38** (1993) 371].

[339] J. L. Lu, *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 2029.

发表文章目录

攻读博士学位期间已发表的学术论文(15篇):

[1] **S. Q. Wu** and X. Cai, "Exact Solutions to Sourceless Charged Massive Scalar Field Equation on Kerr-Newman Background", *J. Math. Phys.* **40** (1999) 4538-4548, gr-qc/9904037.

[2] **S. Q. Wu** and X. Cai, "Generalized Laws of Black Hole Thermodynamics and Quantum Conservation Laws on Hawking Radiation Process", *IL Nuovo Cimento*, **B115** (2000) 143-150, gr-qc/0004040.

[3] **S. Q. Wu** and X. Cai, "Four Quantum Conservation Laws for Black Hole Stationary Equilibrium Radiation Processes", *Int. J. Theor. Phys.* **39** (2000) 2215-2220, hep-th/0009088.

[4] **Wu Shuang-Qing** and Cai Xu, "Hawking Radiation of Dirac Particles in a Variable-mass Kerr Black Hole", *Chin. Phys. Lett.* **18** (2001) 485-487, gr-qc/0102081.

[5] **S. Q. Wu** and X. Cai, "Asymmetry of Hawking Radiation of Dirac Particles in a Charged Vaidya - de Sitter Black Hole", *Int. J. Theor. Phys.* **40** (2001) 1349-1357, gr-qc/0104056.

[6] **S. Q. Wu** and X. Cai, "Hawking Radiation of Dirac Particles in a Variable-mass Kerr Space-time", *Gen. Rel. Grav.* **33** (2001) 1181-1195, gr-qc/0104055.

[7] **S. Q. Wu** and X. Cai, "Non-existence of New Quantum Ergosphere Effect of a Vaidya-type Black Hole", *Mod. Phys. Lett.* **A16** (2001) 1549-1557, gr-qc/0108019.

[8] **S. Q. Wu** and X. Cai, "No New Quantum Thermal Effect of Dirac Particles in a Charged Vaidya - de Sitter Black Hole", *IL Nuovo Cimento*, **B116** (2001) 907-914, hep-th/0108033.

[9] **Wu Shuang-Qing** and Cai Xu, "Quantum Thermal Effect of Dirac Particles in a Non-uniformly Rectilinearly Accelerating Kinnersley Black Hole", *Chin. Phys. Lett.* **19** (2002) 141-143, gr-qc/0109080.

[10] **S. Q. Wu** and X. Cai, "Addendum: Hawking Radiation of Photons in a Variable-mass Kerr Black Hole", *Gen. Rel. Grav.* **34** (2002) 557-564, gr-qc/0110039.

[11] **S. Q. Wu** and X. Cai, "Hawking Radiation of a Non-stationary Kerr-Newman Black Hole: Spin-Rotation Coupling Effect", *Gen. Rel. Grav.* **34** (2002) 605-617, gr-qc/0111044.

[12] **S. Q. Wu** and X. Cai, "Hawking Radiation of Photons in a Vaidya-de Sitter Black Hole", *Int. J. Theor. Phys.* **41** (2002) 559-567, gr-qc/0111045.

[13] **S. Q. Wu** and X. Cai, "Quantum Thermal Effect of Dirac Particles in a Non-uniformly Rectilinearly Accelerating Black Hole with Electronic Charge, Magnetic Charge and Cosmological Constant", *Int. J. Theor. Phys.* **41** (2002) 641-651, gr-qc/0112014.

[14] **S. Q. Wu** and X. Cai, "Hawking Radiation of Dirac Particles in an Arbitrarily Accelerating Kinnersley Black Hole", *Gen. Rel. Grav.* **34** (2002) No. 8 (to appear), gr-qc/0202070.

[15] **S. Q. Wu** and X. Cai, "Hawking Radiation of Weyl Neutrinos in a Rectilinearly Non-uniformly Accelerating Kinnersley Black Hole", *Chin. Phys.* **11** (2002) No. 7 (to appear), gr-qc/0204005.

已投稿的学术论文(2篇):

[1] **S. Q. Wu** and X. Cai, "Massive Complex Scalar Field in the Kerr-Sen Geometry: Exact Solution of Wave Equation and Hawking Radiation", submitted to *J. Math. Phys.*, gr-qc/0107037.

[2] **吴双清**, 曾瑜, 蔡勖, "变加速直线运动黑洞中Weyl中微子的Hawking辐

射", 已投稿到 物理学报.

未发表的文章(4篇):

[1] **S. Q. Wu** and X. Cai, "Extra Spin-Rotation Coupling Effect in a Radiating Kerr Space-time", gr-qc/0104074.

[2] **S. Q. Wu** and X. Cai, "Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein, Fermi-Dirac Statistical Entropies in a D-dimensional Stationary Axisymmetry Space-time", gr-qc/9907054.

[3] **S. Q. Wu** and X. Cai, "Four Quantum Conservation Laws on Black Hole Equilibrium Radiation Process and Quantum Black Hole Entropy", gr-qc/9903087.

[4] **S. Q. Wu**, "Supercommutative Relations Without Supersymmetry".

致 谢

我最初对理论物理学产生兴趣，是始于1984年，当我刚刚成为一名医学生的时候. 那时我从医学院的图书馆里借到了三卷本的《爱因斯坦文集》，曾经多次并仔细地阅读第一卷中爱因斯坦的一篇“自述”. 爱因斯坦对人生观的理解极大地震撼了我的灵魂，因为我那时正在探索自己的未来人生道路. 我接受了大师的感召，确定今后的道路是去做一名理论物理学家，探求物质世界的最基本秘密，将来能完成科学伟人未能完成的梦想— 统一场论. 于是我开始学习相对论和量子论，并且发现学起来并不吃力. 后来我又相继自学了理论物理四大基础课程和数学物理方法，那时我以为掌握了这些理论就可以去实现自己人生的理想了. 事实上并不如此，我后来领会到学物理是一回事，做科研又是另一回事.

我与黑洞物理学结下缘份是在1988年，那年我开始知道了Hawking效应(霍金辐射)这个名词，并且留下了很深的印象. 在这之后我开始涉足黑洞物理学特别是黑洞热力学领域. 相对论和量子力学是现代理论物理学的两大支柱，而黑洞物理是广义相对论、量子力学和热力学交汇的大舞台，很适合我的味口，对这个理论我也情有独衷. 后来我又从一些书中进一步理解了黑洞蒸发是怎么一回事，因为我对广义相对论和量子力学有一定的了解，在特殊函数理论方面又有一点特长，于是我给自己提了两个问题: 一是Schwarzschild(史瓦西)黑洞中标量场方程的径向部分到底是一个什么样的特殊函数? 二是当这个黑洞蒸发到其半径等于它的Compton(康普顿)波长时会发生什么事情? 在随后八年行医的生涯之中我试图解决这两个问题，除了对第一个数学问题有部分解答外，没有找到令人满意的答案. 对第一个问题的满意处理是在我进了粒子物理所后刚做研究生时发表的处女作里给出的. 第二个物理问题更基本，更深刻，到目前还没有找到答案的线索，只是感觉到超弦理论是解决它的唯一希望.

经过了八年的曲折，我终于能够走上做科学研究的正道，已经是在1997年进入粒子物理研究所之后的事情了. 自那时以来到今年(2002年)夏天，我在武汉又度过了一个五年学习的生活. 回顾这五年的经历，我的感触颇多，在科研上既有成功又有失败，有痛苦也有欢乐.

在这五年之中，给我感触最深的是我的导师蔡勖教授给予了我充分大的科研自由度. 在这一点上，我感到是非常幸运的，因为我可以完全凭自己的爱好做感兴趣的物理方向上的研究，并且可以培养自己的独立研究能力. 导师常对我讲的两个字叫“随缘”，对我有很大的影响，它已部分体现在我的已有的科研成果之中. 在攻读学位期间，我对这一点是比较注意的，对课题的选择也是随缘份的. 因为我对黑洞物理非常爱好，在他的建议下，我选择黑洞物理学作为自己的研究方向，科研工作则主要是集中在理论方面. 通过坚持不懈的探索，我逐渐对这个领域有了一个比较全面的了解. 另外在我感兴趣的其它方面，也积累了不少材料，为今后的研究打下了必要的基础. 导师虽然对我的具体科研课题不作限制，但从高标准高水平的角度上从严要求我，教会了我治学的方法准则. 他常说“每天要有一个新想法，一个星期就有七个想法,哪怕都错了也没关系”的这句话常常在我的耳边萦绕. 从导师那里我学得更多的是他的做人哲学，在逆境中坚韧不拔的精神. 导师还时常关心我的个人生活、家庭生活. 他的一言一行以及对工作的敬业精神，给我留下了深刻的影响. 衷心地感谢他给了我不懈的教诲和科研的自由选择.

为人敦厚朴实的周代翠教授经常象兄长般地长期从各方面关心我的学习和生活. 我时常与他交流思想和个人看法. 在他领导的实验室这个温暖的大集体中，大家都能比较融洽地相处. 感谢他长期给我多方面的帮助. 感谢张镇九教授把我推荐给我的导师蔡勖教授. 感谢粒子所的领导们创造了良好的学习环境、较好的科研条件和浓厚的学术氛围. 感谢所有老师的授课.

我曾就有关学术问题请教了北京师范大学的赵峥教授和湖南师范大学的荆继良教授，与他们的交流使我受益菲浅，在此一并致以谢意.

感谢大阪大学物理系的E. Tagasugi教授、北海道大学物理系的H. Suzuki教授和巴黎第七大学高能理论物理实验室的G. Valent教授曾经友好地寄来了他们的研究论文.

我的初中同学、现在在Motorola公司设立的研究所工作的赵杰华博士给了我莫大的帮助. 我能转向物理学并作出一点科研离不开他的长期帮助. 感谢他帮我查阅了许多珍贵的参考文献.

感谢杨纯斌教授、李炜博士、刘涵及王晓荣，特别是前两位师兄曾多次帮忙查找了许多文献资料. 感谢李炜博士在计算机方面的早期帮助. 感谢本校的下列同学: 杨红艳、周代梅、刘勤、曾瑜、张汉中、左健博士后等人在不同阶段的帮助.

感谢钱婉燕高级工程师，特别是余燕玲女士在工作上给予的许多方便. 感谢后者在我处于情绪低落时给予的善意开导.

最后特别要感谢的是我的夫人万丽华和儿子吴迪以及所有的亲友. 没有贤妻十多年来的理解，这五年来的默默奉献和支持，特别是最后这半年来的理解和支持，就不可能有这本博士论文的诞生.

谨以此文献给我的家人!

吴双清
2002年
桂子山

动态黑洞的霍金辐射与标量场方程的精确解

万方数据 WANFANG DATA 文献链接

作者： 吴双清
学位授予单位： 华中师范大学
被引用次数： 2次

本文读者也读过(10条)

1. 蒋志龙 恩施州农村初中物理演示实验教学的研究[学位论文]2011
2. 荆继良 黑洞热力学熵与统计力学熵[学位论文]2000
3. 陈松柏 黑洞时空中的似正规模和幂率拖尾[学位论文]2006
4. 张钰 球对称黑洞时空中的似正规模[学位论文]2008
5. 陈松柏 稳态黑洞的二级相变[学位论文]2002
6. 刘昌良 一类时滞抛物型方程的最优控制问题的必要条件[学位论文]1999
7. 潘启沅 稳态轴对称爱因斯坦—麦克斯韦伸缩子黑洞时空中标量场的衰减[学位论文]2005
8. 刘玉孝 W弦的新发展和引力规范理论与额外维新物理效应[学位论文]2006
9. 彭俊金 (哥德尔)黑洞霍金辐射、量子反常与Kerr/CFT对应性[学位论文]2011
10. 李然 Hopf不变量的拓扑结构和黑洞量子辐射的研究[学位论文]2010

引证文献(2条)

1.付承志,黄翔 5维转动黑洞中有质量标量粒子的Hawking辐射[期刊论文]-华中师范大学学报（自然科学版） 2007(2)
2.杨波 直线加速Kinnersley黑洞中Dirac粒子的热辐射[期刊论文]-物理学报 2008(2)

本文链接：http://d.wanfangdata.com.cn/Thesis_Y442124.aspx